Серия: ФИЗИКА И АСТРОНОМИЯ

Хмельник С.И.
https://orcid.org/0000-0002-1493-6630

Сила Лоренца – следствие системы уравнений Максвелла

Аннотация

Формулируется новый вариационный принцип и доказывается, что уравнения Максвелла являются следствием этого принципа. Симметричные уравнения Максвелла, в которых наряду с электрическими потенциалами и зарядами имеются магнитные потенциалы и заряды также являются следствием этого принципа. Тепловые потери от токов проводимости также учитываются в этом принципе. Уравнения Максвелла, дополненные формулой силы Лоренца, также являются следствием этого принципа. Наконец, уравнения Максвелла, дополненные формулой силы, возникающей при движении магнитных зарядов в электрическом поле, аналогичной формуле Лоренца, также являются следствием этого принципа. Это позволяет автору сделать вывод о том, что формула Лоренца и ее аналог также являются следствием расширенной симметричной системы уравнений Максвелла.

Оглавление

1. Вступление

Обычно в качестве основ электродинамики рассматриваются система уравнений Максвелла и формула силы Лоренца, как две независимые компоненты этих основ. Далее показывается, что формула Лоренца является следствием системы уравнений Максвелла.

Но для этого предварительно рассматриваются симметричные уравнения Максвелла, в которых наряду с электрическими потенциалами и зарядами имеются магнитные потенциалы и заряды, что известно, но (я бы сказал) не афишируется. В эти уравнения включается формула Лоренца.

Затем формулируется новый вариационный принцип и доказывается, что эти уравнения выводятся из предложенного вариационного принципа. Это позволяет автору сделать вывод, что формула Лоренца является следствием система уравнений Максвелла.

Одновременно доказывается, что вместе с магнитной силой Лоренца, связывающей магнитную индукцию и скорость электрического заряда, существует и электрическая сила Лоренца, связывающая электрическую индукцию и скорость магнитного заряда. Это (насколько известно автору) экспериментально не уствновлено.

2. Симметричные уравнения Максвелла

Известно, что Хевисайд был первым, кто ввёл магнитные заряды и магнитные токи в электродинамику Максвелла [2]. Отметим еще, что полюс длинного магнита в математическом плане может отождествляться с магнитным зарядом. При этом вещества, обладающие большой магнитной проницаемостью ведут себя приближенно как магнитные проводники [3]. Симметричные уравнения Максвелла при таком рассмотрении являются системой 8-ми уравнений с 8-ю неизвестными функциями – 6-ю напряженностями и 2-мя скалярными потенциалами при известных электрических и магнитных зарядах.

В данной редакции рассматривается только декартова система координат, где ось oz является направлением распространения волны.

Такая система уравнений Максвелла позволяет решать задачи, в которых заданы электрические и/или магнитные заряды. Они могут быть заданы ступенчатыми и импульсными функциями, а также функциями Дирака. При этом определяются напряженности и скалярные потенциалы, т.е. токи проводимости – электрические и/или магнитные.

3. О вариационном принципе

Известно [4, 5], что уравнения Максвелла выводятся из принципа наименьшего действия. Для этого используется представление о существовании векторного потенциала, как следствия уравнений Максвелла, затем формулируется некоторый функционал относительно такого потенциала и скалярного электрического потенциала, называемый действием. Варьированием действия по векторному магнитному потенциалу и скалярному потенциалу находится условие минимума этого функционала. Этот вывод является неполным, поскольку используемый функционал не включает тепловые потери энергии, возникающие от токов проводимости.

Важно отметить для дальнейшего, что решением уравнений Максвелла не является волновой функцией [6]. Она не может быть решением уравнений Максвелла, поскольку не удовлетворяет закону сохранения энергии – этот вопрос подробно анализируется в [7]. Векторный потенциал совместим только с волновым уравнением и, следовательно, его использование тоже противоречит закону сохранения энергии – см. [8]. Однако, как указывалось, именно векторный потенциал позволил получить вывод уравнений Максвелла из предложенного функционала. Поскольку существование векторного потенциала противоречит основополагающему физическому закону, полученный вывод уравнений Максвелла нельзя считать удовлетворительным.

Дело усложняется еще и тем, что в симметричной форме уравнений Максвелла (при наличии и магнитных, и электрических зарядов) электромагнитное поле не может быть описано при помощи векторного потенциала, непрерывного во всём пространстве. Поэтому симметричные уравнения Максвелла не выводятся из вариационного принципа наименьшего действия, где действие является интегралом разности кинетической и потенциальной энергии.

Таким образом, для вывода уравнений Максвелла из вариационного принципа должен быть найден другой функционал, не предполагающий использования векторного потенциала и позволяющий учитывать диссипацию энергии.

Автор предложил принцип экстремума полного действия, в котором учитываются также тепловые потери. Этот принцип описан [1]. Там же приведен функционал, для которого полная система симметричных уравнений Максвелла является необходимым и достаточным условием существования единственного оптимума.

Кроме того, предложенный функционал может быть использован для решения уравнений Максвелла. Дело в том, что функционал, используемый в том или ином принципе, представляет собой интеграл. Можно построить алгоритм движения по поверхности, описываемой подъинтегральной функцией, в направлении оптимальной линии. При достижении оптимума тем самым решаются уравнения, которые являются условиями существования этого оптимума.

Таким образом, поиск функционала для некоторой области физики является

1. методом вывода уравнений для этой области,
2. методом решения этих уравнений.

4. Функционал для роторов уравнений Максвелла

Далее рассматриваются трехмерные векторы в векторном пространстве с осями координат $\mathbf{0x}, \mathbf{0y}, \mathbf{0z}$ и ортами этих осей $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ соответственно. Далее вектор H обозначается как $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H_x}, \boldsymbol{H_y}, \boldsymbol{H_z})$, где в скобках указаны его координаты. Рассмотрим функционал, предложенный в [1]:

$$\Phi_o = \oint_z \left\{ \oint_y \left\{ \oint_x \left\{ \begin{array}{l} H_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - H_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \\ + H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - H_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + \\ + H_z \frac{\partial E_y}{\partial x} + H_z \frac{\partial E_x}{\partial y} + \\ - E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} + E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \\ - E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} + E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + \\ - E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} + \end{array} \right\} dx \right\} dy \right\} dz, \qquad (1)$$

от функций $\boldsymbol{H_x}, \boldsymbol{H_y}, \boldsymbol{H_z}, \boldsymbol{E_x}, \boldsymbol{E_y}, \boldsymbol{E_z}$трех переменных $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ и покажем, что экстремалями этого функционала являются уравнения вида

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

Необходимые условия экстремума функционала от функций нескольких независимых переменных – уравнения Остроградского [9] имеют для каждой функции вид

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \sum_{a=x,y,z,t}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial f}{\partial(dv/da)}\right)\right] = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

где f – подынтегральное выражение, $v(x,y,z,t)$ – переменная функция, a - независимая переменная. Для данного функционала они принимают следующий вид:

- по переменной $\boldsymbol{H_x}$ (см. слагаемые 1, 2, 9, 12):
  $\boldsymbol{2}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \boldsymbol{2}\frac{\partial E_y}{\partial z} = \boldsymbol{0}$,
- по переменной $\boldsymbol{H_y}$ (см. слагаемые 3, 4, 8, 11):
  $\boldsymbol{2}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \boldsymbol{2}\frac{\partial E_z}{\partial x} = \boldsymbol{0}$,
- по переменной $\boldsymbol{H_z}$ (см. слагаемые 5, 6, 7, 10):
  $\boldsymbol{2}\frac{\partial E_y}{\partial x} - \boldsymbol{2}\frac{\partial E_x}{\partial y} = \boldsymbol{0}$,
- по переменной $\boldsymbol{E_x}$ (см. слагаемые 3, 6, 7, 8):
  $\boldsymbol{2}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \boldsymbol{2}\frac{\partial H_y}{\partial z} = \boldsymbol{0}$,
- по переменной $\boldsymbol{E_y}$ (см. слагаемые 2, 5, 9, 10):
  $\boldsymbol{2}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \boldsymbol{2}\frac{\partial H_y}{\partial z} = \boldsymbol{0}$,
- по переменной $\boldsymbol{E_z}$ (см. слагаемые 1, 4, 11, 12):
  $\boldsymbol{2}\frac{\partial H_y}{\partial x} - \boldsymbol{2}\frac{\partial H_x}{\partial y} = \boldsymbol{0}$.

Отсюда следует, что необходимыми условиями экстремума функционала (1) являются уравнения

- по переменной E:
  $$\boldsymbol{2} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$
- по переменной H:
  $$\boldsymbol{2} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}. \tag{6}$$

Для удобства дальнейшего изложения подынтегральное выражение в (1) будем обозначать как $\mathfrak{J}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E})$. При этом функционал (1) примет вид

$$\Phi_0 = \oint_z \left\{ \oint_y \{ \oint_x \{ \Im(H, \quad E) \} \, dx \} dy \right\} dz, \tag{7}$$

Можно заметить, что

$$\Im(H, E) = H \cdot \mathrm{rot}(E) - E \cdot \mathrm{rot}(H). \tag{8}$$

Здесь каждый сомножитель рассматривается как трехкомпонентный вектор в смысле матричной алгебры. Таким образом, справедлива

Лемма 1. Необходимыми условиями экстремума функционала (7, 8) являются уравнения (2, 3).

5. Построение функционала для уравнений Максвелла

Рассмотрим функционал, который отличается от предложенного в [1] тем, что в него добавлены 2 последних строки:

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{t=0}^{T} \left\{ \int_z \left\{ \int_y \left\{ \int_x (\boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{dx}) \right\} \boldsymbol{dy} \right\} \boldsymbol{dz} \right\} \boldsymbol{dt} \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{\Phi_1} = \left\{ \begin{array}{c} +\frac{1}{2}\{\Im(H', E') - \Im(H'', E'')\} \\ +\frac{\mu}{2}\left\{ H' \frac{dH''}{dt} - H'' \frac{dH'}{dt} \right\} \\ +\frac{\varepsilon}{2}\left\{ -E' \frac{dE''}{dt} + E'' \frac{dE'}{dt} \right\} \\ +\left\{ -K' \left(\mathrm{div}E' - \frac{\rho}{2\varepsilon} \right) + K'' \left(\mathrm{div}E'' - \frac{\rho}{2\varepsilon} \right) \right\} \\ +\left\{ L' \left(\mathrm{div}H' - \frac{\sigma}{2\mu} \right) - L'' \left(\mathrm{div}H'' - \frac{\sigma}{2\mu} \right) \right\} \\ +\frac{\mu}{2}\left\{ H' \cdot \frac{\partial}{\partial X}[v_\rho \times H''] - H'' \cdot [v_\rho \times H'] \right\} \\ -\frac{\varepsilon}{2}\left\{ \left\{ E' \cdot \frac{\partial}{\partial X}[v_m \times E''] + E'' \cdot [v_m \times E'] \right\} \right\} \end{array} \right\};$$

$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$; $\boldsymbol{v_\rho}, \boldsymbol{v_m}$ - скорость движения электрических и магнитных зарядов соответственно. В этом функционале все варьируемые функции представлены в виде сумм: $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' + \boldsymbol{H}''$ и т.п. Применяя теперь указанные выше уравнения Остроградского, находим, дифференцируя:

- по переменной $\boldsymbol{E}'$:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}' - \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\boldsymbol{dE}''}{\boldsymbol{dt}} - \mathrm{grad}(\boldsymbol{K}') - \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}[\boldsymbol{v_m} \times \boldsymbol{E}''] = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

- по переменной $\boldsymbol{E}''$:

$$-\mathrm{rot}\boldsymbol{H}'' + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{d\boldsymbol{E}'}{dt} + \mathrm{grad}(\boldsymbol{K}'') + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}[\boldsymbol{v_m} \times \boldsymbol{E}'] = \boldsymbol{0}, \quad (3)$$

- по переменной $\boldsymbol{H}'$:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{\mu}\frac{d\boldsymbol{H}''}{dt} + \mathrm{grad}(\boldsymbol{L}') + \boldsymbol{\mu}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}''] = \boldsymbol{0}, \quad (4)$$

- по переменной $\boldsymbol{H}''$:

$$-\mathrm{rot}\boldsymbol{E}'' - \boldsymbol{\mu}\frac{d\boldsymbol{H}'}{dt} - \mathrm{grad}(\boldsymbol{L}'') - \boldsymbol{\mu}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}'] = \boldsymbol{0}, \quad (5)$$

- по переменным $\boldsymbol{K}', \boldsymbol{L}', \boldsymbol{K}'', \boldsymbol{L}''$ соответственно:

$$-\left(\mathrm{div}\boldsymbol{E}' - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}\right) = \boldsymbol{0}, \ \left(\mathrm{div}\boldsymbol{H}' - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\mu}}\right) = \boldsymbol{0}, \quad (6)$$

$$\left(\mathrm{div}\boldsymbol{E}'' - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}\right) = \boldsymbol{0}, \ -\left(\mathrm{div}\boldsymbol{H}'' - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\mu}}\right) = \boldsymbol{0}. \quad (7)$$

В силу симметрии уравнений (2-7) имеем:

$$E' = E'', \ H' = H'', \ K' = K'', \ L' = L''. \quad (8)$$

Обозначим:

$$E = E' + E'', \ H = H' + H'', \ K = K' + K'', \ L = L' + L''. \quad (9)$$

Вычитая уравнение (3) из (2), получаем

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{\varepsilon}\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} - \mathrm{grad}(\boldsymbol{K}) - \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}[\boldsymbol{v_m} \times \boldsymbol{E}] = \boldsymbol{0}. \quad (10)$$

Аналогично, вычитая из (5) из (4), получаем

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\mu}\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} + \mathrm{grad}(\boldsymbol{L}') + \boldsymbol{\mu}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}] = \boldsymbol{0}. \quad (11)$$

Аналогично, из (6, 7) получаем

$$(\mathrm{div}E - \rho/\varepsilon) = 0, \quad (12)$$

$$(\mathrm{div}H - \sigma/\mu) = 0. \quad (13)$$

Уравнения (2) и (3) являются необходимыми условиями существования экстремума функционала (1) по функции E' и по функции E''. Эти экстремумы имеют противоположный характер (минимум-максимум или максимум-минимум), поскольку уравнения (2) и (3) отличаются знаками слагаемых. Следовательно, эти уравнения являются необходимыми условиями существования седловой линии по функциям E' и E'' в функционале (1).

Аналогично, уравнения (4) и (5) являются необходимыми условиями существования седловой линии по функциям H' и H'' в функционале (1).

Аналогично, уравнения (6, 7) являются необходимыми условиями существования седловой линии по функциям K', K'' и седловой точки по функциям L', L'' в функционале (1).

Лемма 2. Необходимыми условиями экстремума функционала (1) являются уравнения (9-13).

Можно заметить, что уравнения (9-13) являются симметричными уравнениями Максвелла, где

E - напряженность электрического поля,
H - напряженность магнитного поля,
μ - магнитная проницаемость,
ε - диэлектрическая проницаемость,
ρ - плотность электрического заряда,
σ - плотность гипотетического магнитного заряда,
$\mathrm{grad}(K)$ - плотность электрического тока,
$\mathrm{grad}(L)$ - плотность гипотетического магнитного тока.

Обозначим:

$$J = \mathrm{grad}(K), \tag{14}$$
$$M = \mathrm{grad}(L). \tag{15}$$

Рассмотрим физический смысл величины K. Обозначим:

ϕ - электрический скалярный потенциал,
ϑ - электропроводность,
j_x - проекция вектора плотности электрического тока J на ось ox.

Тогда получим $j_x = -\vartheta \frac{d\phi}{dx}$. Но из (14) следует, что $j_x = \frac{dK}{dx}$. Следовательно,

$$\frac{dK}{dx} = -\vartheta \frac{d\phi}{dx}, \tag{16}$$

т.е.

$$K = -\vartheta\phi. \tag{17}$$

Аналогично,

$$\frac{dL}{dx} = -\varsigma \frac{d\varphi}{dx}, \tag{18}$$
$$L = -\varsigma\varphi, \tag{19}$$

где

φ - магнитный скалярный потенциал,
ς – магнитопроводность,
m_x - проекция вектора плотности магнитного тока M на ось ox.

Итак, объединяя уравнения (10, 11, 14, 15), получаем окончательную форму расширенных уравнений Максвелла:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\boldsymbol{dE}}{\boldsymbol{dt}} - \mathrm{J} - \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial X}}[\boldsymbol{v_m} \times \boldsymbol{E}] = \boldsymbol{0}, \tag{20}$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{dH}}{\boldsymbol{dt}} + \mathrm{M} + \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial X}}[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}] = \boldsymbol{0}, \tag{21}$$

$$(\mathrm{div}E - \rho/\varepsilon) = 0, \tag{22}$$
$$(\mathrm{div}H - \sigma/\mu) = 0. \tag{23}$$

6. Сила Лоренца

Из (5.21) при $\frac{dH}{dt} = 0$, $\mathrm{M} = 0$ находим:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial X}}\left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}\right] = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

или в покомпонентном виде

$$\left\{\begin{matrix} (\mathbf{rot}\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}}\left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}\right]_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \\ (\mathbf{rot}\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}}\left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}\right]_{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0} \\ (\mathbf{rot}\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{xz}} + \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}}\left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}\right]_{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0} \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

При $\mathrm{rot}E = 0$, т.е. при $E = \mathrm{const}$ вторые слагаемые – производные также равны нулю и тогда дифференцируемые выражения становятся постоянными величинами, т.е.

$$\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{\mu}\left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}\right]_{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{\mu}\left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}\right]_{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{\mu}\left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}\right]_{\boldsymbol{z}} \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{\mu}\left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{H}\right] = \left[\boldsymbol{v_\rho} \times \boldsymbol{B}\right] = \boldsymbol{E} \tag{3}$$

Легко заметить, что мы получили выражение для вектора магнитной силы Лоренца. Точно также из (5.20) мы можем получить выражение вида

$$\boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{v_m} \times \boldsymbol{E}] = [\boldsymbol{v_m} \times \boldsymbol{D}] = \boldsymbol{F_m}, \tag{4}$$

которое естественно назвать выражением для вектора электрической силы Лоренца. Представляется, что существование такой силы не должно вызывать сомнений. Видимо, она имеет малую величину и поэтому еще не обнаружена.

Надо заметить, что из одного и того же уравнения (5.21) мы можем получить формулы для законов Фарадея и Лоренца:

при $\mathrm{M}=0$, $\boldsymbol{v_\rho} = \boldsymbol{0}$ из (5.21) находим $\qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{dB}}{\boldsymbol{dt}}$,

при $\mathrm{M} = 0$, $\frac{dH}{dt} = 0$ из (3) находим $\qquad E = \left[v_\rho \times B\right]$.

При этом снимается то противоречие, о котором говорил Фейнман, когда обсуждал явления, при которых возникает э.д.с.: , «мы не знаем ни одного другого такого примера, когда бы простой и точный закон требовал для своего настоящего понимания анализа в терминах *двух разных явлений*» [12].

7. О достаточных условиях экстремума

В [1] рассматриваются достаточные условия экстремума. Мы не будем повторять это доказательство здесь. Это доказательство является, по-существу, доказательством следующей теоремы.

Теорема 1. Функционал Φ, определенный в (5.1) в зависимости от функций $Z' = [E', H', K', L']$ и $Z'' = [E'', H'', K'', L'']$, имеет глобальную седловую экстремаль, где достигается сильный минимум по функции Z' и сильный максимум по функции Z''. Функции на этой экстремали таковы, что $Z' = Z''$, а их сумма $Z = Z' + Z'' = [E, H, K, L]$ удовлетворяет уравнениям Максвелла.

В [1] показывается, что этот функционал может быть получен преобразованием известного уравнения [10] баланса мощности электромагнитного поля.

Литература

1. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, версия 5, стр. 1–361. "MiC" - Mathematics in Computer Corp., 2014, https://doi.org/10.5281/zenodo.3597754
2. O. Heaviside, “Electromagnetic theory”, London, 1893.
3. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Изд. «Наука», М. 1968.
4. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. Издательство. «Лань», 2003, 400 с.
5. Дмитрий Лосев. Вариационные принципы электродинамики, https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=OUHy-zDdyjU
6. Хмельник С.И. Волновое уравнение - НЕ уравнение электромагнитной волны. Доклады независимых авторов, ISSN 2225-6717, 2021, 51(1), 135–139. https://doi.org/10.5281/zenodo.4454582
7. Хмельник С.И. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, ред. 22, сс. 1–439, "MiC" - Mathematics in Computer Corp, https://doi.org/10.5281/zenodo.5796182
8. Хмельник С.И. Уточнение закона Био-Савара-Лапласа. Доклады независимых авторов, ISSN 2225-6717, 2021, 54(1), 14–21., 2022, Доклады независимых авторов, https://www.academia.edu/61483128

9. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Эдиториал УРСС, Москва, 2000.
10. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Радио и связь, 2000. -559 с.
11. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 6, глава 7. Электродинамика. Москва, изд. "Мир", 1966.