

Серия: ФИЗИКА

Хмельник С.И.

<https://orcid.org/0000-0002-1493-6630>

Уточнение закона Био-Савара-Лапласа

Аннотация

Указывается, что закон Био-Савара-Лапласа не выводится из уравнений Максвелла, а является результатом решения уравнений Максвелла для провода с постоянным током. Показывается, что провод с постоянным током создает в своей окрестности вектор магнитной индукции, цилиндрические проекции которого определяются в форме, близкой к первоначальной формуле. Показывается, кроме того, что вместе с магнитным потоком распространяется поток электромагнитной энергии, являющийся частью мощности источника тока. Показано, что векторный потенциал не имеет формальной связи с уравнениями Максвелла и его применение в физике лишено обоснования такой связью.

В результате показывается, что существование векторного потенциала противоречит закону сохранения энергии.

Оглавление

1. Введение
 2. Математическая модель
 3. Напряженности в окрестности провода
 4. Поток энергии
 5. Обсуждение
 6. Эпилог
- Литература

1. Введение

Закон Био-Савара-Лапласа (БСЛ) получен экспериментально и его формула имеет известный вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1)$$

Принято считать, что «этот закон является следствием двух уравнений Максвелла для магнитного поля при условии постоянства электрического

поля» [1]. Вывод заключается в следующем. Вводится векторный потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{A}), \quad (2)$$

и условие калибровочной инвариантности

$$\text{div}(\mathbf{A}) = 0. \quad (3)$$

Путем преобразования этих уравнений выводится закон БСЛ в виде уравнения (1). Этот закон устанавливает зависимость магнитной напряженности от постоянного тока проводимости. Известно также уравнение Максвелла, связывающее магнитную напряженность с постоянным током проводимости, а именно

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}. \quad (4)$$

Принято считать, что уравнение (4) является дифференциальной формой записи уравнения (1). Доказательство этого утверждения отсутствует. А ниже будет приведено доказательство того, что эти уравнения противоречивы. Отсюда следуют два утверждения

1. Если согласиться с тем, что все явления в области электродинамики описываются уравнениями Максвелла, то необходимо признать, что уравнение (1) не является строгим и требует уточнения. Но это ни в коей мере не умаляет заслуги авторов этого закона, которые сумели его обнаружить и сформулировать на пустом месте, когда неоткуда было ждать подсказок. Уточнению этого закона посвящена предлагаемая статья.

2. Векторный потенциал не имеет формальной связи с уравнениями Максвелла. Заметим еще, что условие калибровочной инвариантности может быть выполнено множеством способов, что привносит в физику произвол, который противоречит самому духу классической физики. В то же время применение этого условия в указанном доказательстве служит обоснованием дальнейшего использования векторного потенциала и в других областях физики [2]. Но поскольку векторный потенциал не имеет формальной связи с уравнениями Максвелла, его применение лишено этого обоснования.

Далее будет показано, что, по крайней мере, для длинного провода без векторного потенциала можно обойтись и решение получается полным, подтвержденным экспериментально, но более сложным, чем в существующем законе Био-Савара-Лапласа.

2. Математическая модель

В [3] показано, что уравнения Максвелла для провода с постоянным током имеют вид

$$\operatorname{rot}(J) = 0, \quad (\text{a})$$

$$\operatorname{rot}(H) - J - J_o = 0, \quad (\text{b})$$

$$\operatorname{div}(J) = 0, \quad (\text{c})$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (\text{d})$$

где H, J – магнитные напряженности и плотности токов. Мы будем использовать цилиндрические координаты r, ϕ, z и рассматривать

- плотность основного тока оси oz J_o ,
- плотности дополнительных токов J_r, J_ϕ, J_z ,
- магнитные напряженности H_r, H_ϕ, H_z – радиальная, окружная и продольная соответственно.

Важно отметить, что используется полная система уравнений Максвелла, а не сокращенная система двух уравнений (b, d), которая считается приемлемой для магнитостатики. Такая сокращенная система не позволяет найти решение даже для провода с постоянным током. Напротив, полная система уравнений позволяет найти это решение и найти уравнения для потока энергии **внутри** (а не снаружи) провода.

В [3] подробно рассматривается решение уравнений Максвелла для провода постоянного тока и доказывается, что решение существует только при ненулевых дополнительных токах

J_r, J_ϕ, J_z . Решение имеет следующий вид:

$$J_r = j_r(r) \cos(\alpha\phi + \chi z), \quad (12)$$

$$J_\phi = j_\phi(r) \sin(\alpha\phi + \chi z), \quad (13)$$

$$J_z = j_z(r) \sin(\alpha\phi + \chi z), \quad (14)$$

$$H_r = h_r(r) \cos(\alpha\phi + \chi z), \quad (15)$$

$$H_\phi = h_\phi(r) \sin(\alpha\phi + \chi z), \quad (16)$$

$$H_z = h_z(r) \sin(\alpha\phi + \chi z), \quad (17)$$

где

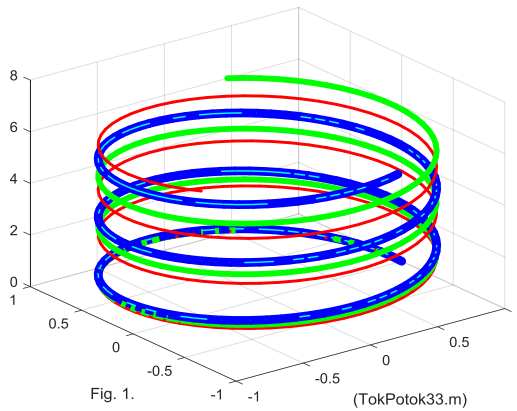
$j(r), h(r)$ - некоторые функции координаты r ,

α, χ – некоторые константы.

В [3] доказано, что в проводе постоянного тока траектория точки с постоянной плотностью тока и постоянной магнитной напряженностью на цилиндре постоянного радиуса является винтовой линией. Кроме того, через каждую окружность проходит множество траекторий, на которых напряженности и плотности токов изменяются синусоидально в зависимости от ϕ .

Следовательно,

линия на цилиндре постоянного радиуса r , по которой точка движется так, что все напряженности и плотности токов остаются постоянными, является винтовой линией.



Например, на рис. 1 показаны три винтовые линии, описываемые функциями тока: толстая линия при $\alpha = 2$, $\chi = 0.8$, средняя линия при $\alpha = 0.5$, $\chi = 2$ и тонкая линия при $\alpha = 2$, $\chi = 1.6$.

Далее будет показано, что и **вне провода** (где отсутствует ток) линия с постоянной магнитной напряженностью на цилиндре постоянного радиуса является винтовой линией.



Рис. 2.

Сам факт существования вокруг проводника с постоянным током магнитного поля, имеющего спиралеобразную конфигурацию, установлен еще Эрстедом в 1820 г. [127, стр. 184].

На рис. 2 показана фотография провода, смоченного магнитной жидкостью (увеличено в 20 раз). Видны спиральные линии, образуемые магнитной жидкостью. Эта фотография свидетельствует о существовании спиральных линий магнитной напряженности.

3. Напряженности в окрестности провода

Полученное в [3] решение позволяет найти магнитное поле, создаваемое током **вне провода**. Для этого достаточно взять решение при $r > R$, где R - радиус провода. При этом находим, что магнитные напряженности вне провода определяются следующими формулами:

$$h_z''(r) + h_z'(r) - h_z(r) \left(\frac{\alpha^2}{r^2} + 1 \right) = 0 \quad (1)$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\alpha}{\chi} \frac{h_z(r)}{r}, \quad (2)$$

$$h_r(r) = \frac{-1}{\chi} h_z'(r). \quad (3)$$

При известной функции $h_z(r)$ могут быть найдены функции (2, 3). Решением уравнения (1) является модифицированная функция Бесселя. На рис. 3 представлены функции (1, 2, 3) при

$$\alpha = 0.25, \chi = 0.5, R = 0.002, r > R. \quad (4)$$

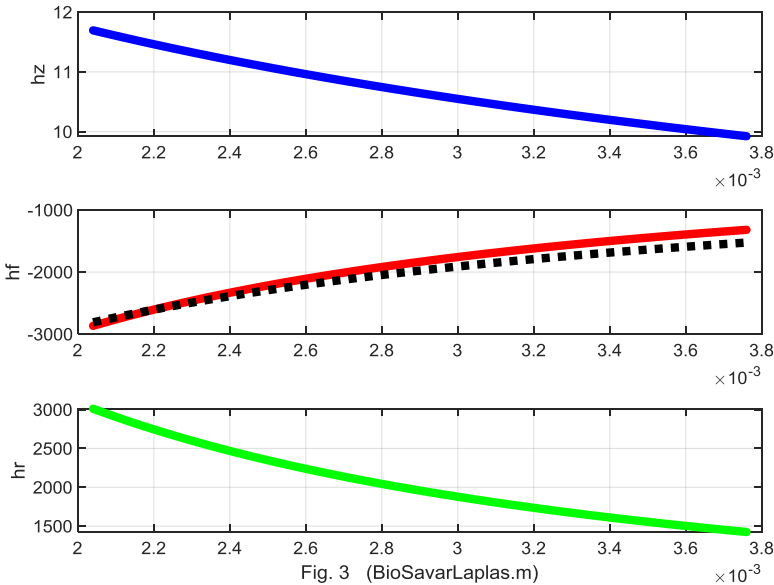


Fig. 3 (BioSavarLaplas.m)

В соответствии с законом БСЛ функция окружной магнитной напряженности бесконечно длинного провода имеет вид:

$$h_{BSL}(r) = \frac{I_0}{4\pi r}. \quad (5)$$

Эта формула, как частный случай закона БСЛ, многократно проверена экспериментально и в ней можно не сомневаться. Но наша задача состоит в том, чтобы **уточнить закон БСЛ** так, чтобы он стал действительным следствием уравнений Максвелла.

Во втором окне на рис. 3 пунктиром показана функция вида

$$h_{\varphi 2}(r) = \frac{Rh_{\varphi}(R)}{r}. \quad (6)$$

На этом примере видно, что функция (6) является хорошей аппроксимацией функции (2), т.е.

$$h_{\varphi 2}(r) \approx h_{BSL}(r). \quad (7)$$

Таким образом, получена аналитическая зависимость между напряженностью $h_{BSL}(r)$, перпендикулярной проводу и определенной законом БСЛ для бесконечно длинного провода, и результатом $h_{\varphi 2}(r)$ решения уравнений Максвелла для провода с постоянным током.

Закон БСЛ устанавливает, что отсутствуют другие проекции напряженности, создаваемой током в проводе, кроме $h_{BSL}(r)$. Для того, чтобы закон БСЛ полностью являлся следствием уравнений Максвелла, надо предположить, что существуют еще напряженности, направленные вдоль радиуса провода $h_r(r)$ и вдоль оси $h_z(r)$ провода. Итак, уточненный закон БСЛ состоит в том, что

провод с постоянным током создает в окрестности провода вектор магнитной напряженности, цилиндрические проекции которого определяются по (1, 2, 3)

Все эти напряженности создаются током на участке, перпендикулярном радиусу r . Таким образом, напряженности бесконечно длинного провода имеют вид (2.15, 2.16, 2.17), где входящие в эти формулы величины $h(r)$ определяются по (1-3).

На рис. 4 показан годограф вектора напряженности

$$\vec{H}_{zf} = \vec{H}_z + \vec{H}_f, \quad (8)$$

где слагаемые векторы определены по (2.12, 2.13) при фиксированных значениях координат r, φ . Годограф построен при условиях (4) и

$$r = 0.0026, \varphi = 0, h_{\varphi}(r) = -2000, h_z(r) = 11. \quad (9)$$

На проводе выделена точка с определенными значениями векторов \vec{H}_z, \vec{H}_f . Их сумма \vec{H}_{zf} указана точкой на годографе. Следует обратить внимание на то, модуль вектора \vec{H}_z значительно меньше модуля вектора \vec{H}_f – см. также рис. 3. Это явилось причиной того, что авторы закона БСЛ не заметили эту проекцию напряженности. Значение проекций H_f и H_r совпадают по порядку величин. Видимо в те давние времена трудно было определить направление вектора магнитной индукции. В наше время H_r можно обнаружить экспериментально.

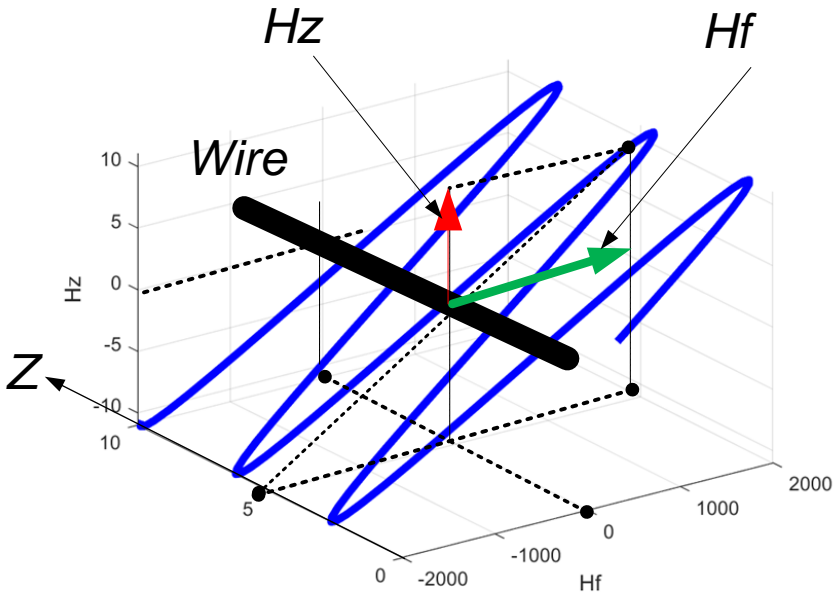


Рис. 4.

3. Поток энергии

Рассмотрим энергетику взаимодействия тока в проводе с магниточувствительными элементами. Это взаимодействие требует затрат энергии от источника тока. Появление в окрестности провода ферритовой детали (например) вызывает увеличение тока и соответствующая дополнительная энергия расходуется на перемещение этой детали. Эта энергия может передаться детали только потоком энергии. Следовательно, кроме магнитного поля на деталь должен действовать поток электромагнитной энергии.

В [3] показано, что в окрестности провода, кроме магнитной напряженности, создается электрическая напряженность. Эти напряженности, по-прежнему, имеют вид (2.12-2.17), где для $r > R$:

$$\mathbf{e}_z''(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z'(\mathbf{r}) \frac{1}{r} - \mathbf{e}_z(\mathbf{r}) \left(\frac{\alpha^2}{r^2} + \chi^2 \right) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\mathbf{e}_\phi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{\chi} \cdot \frac{\mathbf{e}_z(\mathbf{r})}{r}, \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_r(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\chi} \cdot \mathbf{e}_z'(\mathbf{r}), \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_z(R) = \rho \cdot j_z(R), \quad (4)$$

где ρ - удельное сопротивление. Плотность потока энергии, достигающей детали, определяется по формуле (как следует из [3])

$$S_\phi = A \mathbf{e}_z(r) \cdot h_r(r), \quad (5)$$

где A – константа.

4. Обсуждение

В [3] найдено решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током. Приведенные выводы из этого решения обоснованы, по крайней мере, тем фактом, что они следуют из уравнений Максвелла.

Решение для провода с постоянным током легко переносится на область вне провода. Кроме того, это решение согласуется с экспериментом Эрстеда.

Существует уточненный закон БСЛ, являющийся следствием уравнений Максвелла. Уточнения сводятся к тому, что вектор магнитной напряженности, создаваемой постоянным током, направлен не строго перпендикулярно направлению тока, а имеет три проекции, причем величина окружной проекции превалирует.

Отсюда следует, что определение магнитной индукции в окрестности провода через дивергенцию векторного потенциала, является приближенным, а представление о том, что условие $\text{div}(\mathbf{A})=0$ естественным образом дополняет уравнения Максвелла, является неверным.

Уточненный закон БСЛ позволяет определить поток энергии, направленный от провода на магниточувствительный элемент.

6. Эпилог

Векторный потенциал A вводится в уравнения Максвелла дополнением последних двумя строками:

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (a)$$

$$\operatorname{div}(E) = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (b)$$

$$\operatorname{rot}(H) = J + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (c)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (d)$$

$$\operatorname{rot}(A) = \mu H, \quad (e)$$

$$\operatorname{div}(A) = 0, \quad (f)$$

где ρ - плотность электрического заряда.

Сбросим с этих уравнений блистающую красоту векторной алгебры и получим 12 уравнений, которые в декартовых координатах имеют вид:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \mu H_x, \quad (9)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \mu H_y, \quad (10)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \mu H_z, \quad (11)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Из (1-3) и (9-10) находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \quad (15)$$

В частности, из (13) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A_x}{\partial y} = - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

ИЛИ

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A_y}{\partial x} = - \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A_x}{\partial y} = - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

и т.д. В общем виде запишем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A_a}{\partial b} = - \frac{\partial E_a}{\partial b}. \quad (16)$$

Условия (16) выполняются только в том случае, если решение уравнений Максвелла является волновой функцией. Но волновая функция не может быть приемлемым для физики решением, поскольку не удовлетворяет закону сохранения энергии [3]. Таким образом,

**существование векторного потенциала
противоречит закону сохранения энергии.**

Литература

1. Закон Био-Савара-Лапласа, https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Био_—_Савара_—_Лапласа
2. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. Москва, изд. "Мир", 1966.
3. Хмельник С.И. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла (глава 5). Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, <https://doi.org/10.5281/zenodo.4584868>