Серия: **ФИЗИКА**

Хмельник С.И.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1493-6630

Уравнения движения одиночного заряда в вакууме

Аннотация

Рассматривается движение одиночного электрического заряда в вакууме при отсутствии каких-либо электромагнитных полей. Решается система уравнений Максвелла для этого случая и показывается, что электрический заряд, обладающий кинетической энергией, движется в вакууме по спиральной траектории с замедлением, вызванным затратой энергии на перемагничивание окружающего пространства.

Рассмотрим одиночный заряд, движущийся в вакууме, где отсутствуют какие-либо электромагнитные поля. Такой заряд движется прямолинейно с постоянной скоростью. Известно, что такой заряд не излучает электромагнитных волн и не расходует на этот процесс энергию. Однако вокруг него создается магнитное поле, которое формируется заново в каждом новом положении заряда. Этот процесс требует затрат энергии. Действительно, предположим, что заряд движется около тела, изготовленного из магнитно-мягкого материала. Изменения магнитного поля в нем вызывает перемагничивание материала, на что расходуется энергия. Эта энергия была затрачена движущимся зарядом. Следовательно, энергия для перестройки магнитного поля расходуется движущимся зарядом всегда. Исходя из этой предпосылки, рассмотрим математическую модель движения одиночного заряда в вакууме.

Прежде всего рассмотрим систему уравнений Максвелла для такого заряда. Следуя Эйхенвальду [1], движение заряда q со скоростью v можно считать эквивалентным электрическому току

$$I = qv. \tag{1}$$

Тогда это движение описывается так же, как постоянный ток – см. приложение. Это означает, что заряд не может двигаться строго линейно, а движется по спирали. Вместе с зарядом движется поток энергии, равной в данном случае кинетической энергии заряда.

Этому потоку энергии соответствует объемная плотность силы Лоренца,

$$F = \frac{S\mu}{\rho}, \tag{3}$$

где μ, ρ - абсолютная магнитная проницаемость и удельное сопротивление движению заряда. Его происхождение будет показано ниже.

Эта сила действует на заряды в теле провода. В нашем случае поток энергии движется вместе с зарядом, а сила Лоренца действует на этот заряд. Поток энергии, как известно, равен мощности. Следовательно, мощность движения заряда

$$P = Sb, \tag{4}$$

где b - площадь поперечного сечения заряда. С другой стороны, известно, что мощность – это

$$P = FVv, \tag{5}$$

где V – объем заряда. Из (3, 4, 5) находим:

$$P = \frac{S\mu vV}{\rho b} \tag{6}$$

или

$$v = \frac{\rho b}{\mu V}, \tag{6a}$$

где μ, ρ - абсолютная магнитная проницаемость вакуума и удельное электрическое сопротивление движению заряда. Это сопротивление вызвано тем, что заряд тратит энергию на переформирование электрического поля. С третьей стороны известно, что мощность

$$P = \rho I^2. \tag{7}$$

Из (1, 6, 7) находим:

$$\frac{S\mu vV}{\rho b} = \rho(qv)^2. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{S\mu V}{vb}}. \tag{9}$$

Наконец, мощность P - это мощность, с которой расходуется кинетическая энергия заряда, т.е.

$$P = mva, \tag{10}$$

где m, a – масса и ускорение заряда. Из (5, 10, 3, 6a) находим:

$$a = \frac{FVv}{m} = \frac{S\mu v}{m\rho} = \frac{S\mu}{m\rho}\frac{\rho b}{\mu V} = \frac{S}{m}\frac{b}{V}. \tag{11}$$

Таким образом, <u>электрический заряд, обладающий кинетической энергией, движется в вакууме по спиральной траектории с замедлением, вызванным затратой энергии на перемагничивание окружающего пространства</u>.

Приложение. Математическая модель постоянного тока (краткое изложение по [2])

При моделировании будем использовать цилиндрические координаты r, φ, z в системе СИ.

Уравнения Максвелла для провода постоянного тока имеют вид:

$$\mathrm{rot}(J) = 0, \tag{a}$$
$$\mathrm{rot}(H) - J - J_o = 0, \tag{b}$$
$$\mathrm{div}(J) = 0, \tag{c}$$
$$\mathrm{div}(H) = 0, \tag{d}$$

где

- основной ток с плотностью J_o, передаваемый по проводу в нагрузку,
- дополнительные токи с плотностью $J = (J_r, J_\phi, J_z)$,
- магнитные напряженности $H = \left(H_r, H_\phi, H_z\right)$,

Уравнения (a-d) для цилиндрических координат имеют вид:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (d)} \tag{1}$$
$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = J_r, \quad \text{см. (b)} \tag{2}$$
$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\phi, \quad \text{см. (b)} \tag{3}$$
$$\frac{H_\phi}{r} + \frac{\partial H_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = J_z + J_o, \quad \text{см. (b)} \tag{4}$$
$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (c)} \tag{5}$$
$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_z}{\partial \phi} - \frac{\partial J_\phi}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (a)} \tag{6}$$
$$\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r} = 0, \quad \text{см. (a)} \tag{7}$$
$$\frac{J_\phi}{r} + \frac{\partial J_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_r}{\partial \phi} = 0. \quad \text{см. (a)} \tag{8}$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$\mathrm{co} = \cos(\alpha\varphi + \chi z), \tag{10}$$
$$\mathrm{si} = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \tag{11}$$

где α, χ – некоторые константы. Для этих уравнений существует решение, которое имеет следующий вид:

$$J_r = j_r \mathrm{co}, \tag{12}$$
$$J_\varphi = j_\varphi \mathrm{si}, \tag{13}$$
$$J_z = j_z \mathrm{si}, \tag{14}$$
$$H_r = h_r \mathrm{co}, \tag{15}$$

$$H_\varphi = h_\varphi \mathrm{si}, \tag{16}$$

$$H_z = h_z \mathrm{si}, \tag{17}$$

где $j(r), h(r)$ - известные функции координаты r. При данном r все токи и магнитные напряженности оказываются на винтовых линиях. На рис. 1 показаны три винтовые линии, описываемые функциями (10, 11) тока с проекциями J_φ и J_z при $r = \mathrm{const}$. Эти проекции определяются по (13, 14), т.е. зависят от функции si. На рис. 1 показаны: толстая линия при $\alpha = 2, \chi = 0.8$, средняя линия при $\alpha = 0.5, \chi = 2$ и тонкая линия при $\alpha = 2, \chi = 1.6$.

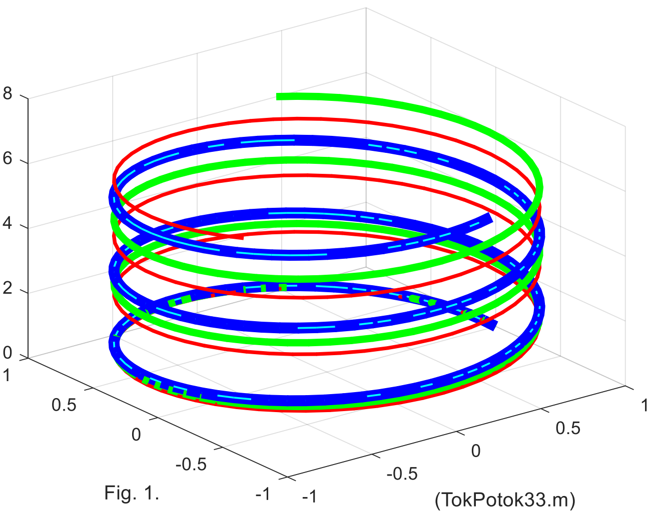

Fig. 1. (TokPotok33.m)

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется в этом случае по формуле:

$$S = E \times H. \tag{18}$$

Токам соответствуют одноименные электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho \cdot J, \tag{19}$$

где ρ – удельное электросопротивление. Совмещая (18, 19), получаем:

$$S = \rho J \times H = \frac{\rho}{\mu} J \times B. \tag{20}$$

Магнитная сила Лоренца, действующая на все заряды проводника в единичном объеме - объемная плотность силы Лоренца равна

$$F = J \times B. \tag{21}$$

Из (20, 21) находим:

$$F = \mu S / \rho. \tag{22}$$

Следовательно, <u>в проводе с постоянным током плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна вектору Пойнтинга</u>.

Итак, ток с плотностью J создает поток энергии с плотностью S, который тождественен магнитной силе Лоренца с плотностью F. Эта сила Лоренца действует на заряды, движущиеся в токе J, в направлении этого тока. Следовательно, можно утверждать, что вектор Пойнтинга создает э.д.с. в проводнике.

В цилиндрических координатах плотность потока электромагнитной энергии (3) имеет три компоненты S_r, S_ϕ, S_z, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно:

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\phi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_\phi H_z - (J_z + J_o)H_\phi \\ J_z H_r - J_r H_z + J_o H_r \\ J_r H_\phi - J_\phi H_r + J_r H_{o\phi} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

где

$$H_{o\phi} = J_o r. \tag{24}$$

Итак, <u>в проводе циркулируют потоки электромагнитной энергии</u>. Они являются внутренними. Они порождаются токами и магнитными напряженностями, создаваемые этими токами. В свою очередь, эти потоки воздействует на токи, как силы Лоренца. При этом суммарная энергия этих потоков частично расходуется на тепловые потери, но в основном передается в нагрузку.

Продольный поток энергии S_z. равен мощности P, передаваемой по проводу:

$$P = S_z. \tag{25}$$

Эта мощность изменяется вдоль провода, т.к. часть энергии тратится на тепловые потери. При известном потоке энергии и геометрических размерах провода могут быть найдены значения констант α, χ.

Таким образом, показано, что существует такое решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током, которому соответствует представление о

- законе сохранения энергии,
- винтовой траектории постоянного тока в проводе,
- передаче энергии вдоль и внутри провода,
- зависимости плотности винтовой траектории от передаваемой мощности.

Литература

1. А. Эйхенвальд. Электричество, М.Л. 1933, п. 282, http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/Eyhenvald.djvu
2. Хмельник С.И. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, "MiC" - Mathematics in Computer Corp., Israel and printed in the USA, Lulu Inc. ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2020, http://doi.org/10.5281/zenodo.3783458