

Хмельник С. И.

Второе решение уравнений Максвелла

Аннотация

Предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума. Предварительно отмечается, что доказательство единственности известного решения основано на законе сохранения энергии, который не соблюдается (для мгновенных значений) в известном решении. Предлагаемое решение не нарушает закон сохранения энергии. Кроме того, в этом решении электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе. Приводится подробное доказательство для заинтересованного читателя.

Оглавление

1. Введение
2. Решение уравнений Максвелла
3. Напряженности
4. Потоки энергии
5. Обсуждение
- Приложение 1
- Приложение 2
- Литература

1. Введение

В последнее время критика справедливости уравнений Максвелла слышится со всех сторон. Уверенность критиков создается, прежде всего, нарушением закона сохранения энергии. И, действительно, *"плотность потока электромагнитной энергии (модуль вектора Умова-Пойнтинга) «пульсирует» по гармоническому закону. Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?"* [1]. Безусловно, нарушается, если электромагнитная волна удовлетворяет известному решению уравнений Максвелла. Но ведь другого решения нет: *"Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь*

выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана" [2]. Таким образом, единственность решения доказывается на основе применения того закона, который нарушается в этом решении.

Другим результатом, следующим из существующего решения, является синфазность электрической и магнитной компонент напряженностей в электромагнитной волне. Это противоречит представлению о непрерывном преобразовании электрической и магнитной компонент энергии в электромагнитной волне. В [1], например, этот факт относится к "порокам современной классической электродинамики".

Такие результаты, следующие из известного решения уравнений Максвелла, позволяют усомниться в достоверности уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти результаты следуют только из найденного решения. Но это решение, как указано выше, может быть иным.

Ниже выводится другое решение уравнений Максвелла, в котором плотность потока электромагнитной энергии остается постоянной во времени, а электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

2. Решение уравнений Максвелла

Вначале рассмотрим решение уравнений Максвелла для вакуума. Эти уравнения в системе СГС имеют вид [3]:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div}(E) = 0,$$

$$\operatorname{div}(H) = 0.$$

В системе цилиндрических координат r , φ , z эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = M_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = M_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = M_z, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (8)$$

$$J = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (9)$$

$$M = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где α , χ , ω – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$J_r = j_r(r)co, \quad (13)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (15)$$

$$H_r = h_r(r)co, \quad (16)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (17)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (18)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (19)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (20)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (21)$$

$$M_r = m_r(r)co, \quad (21)$$

$$M_\varphi = m_\varphi(r)si, \quad (22)$$

$$M_z = m_z(r)si, \quad (23)$$

где $j(r)$, $h(r)$, $e(r)$, $m(r)$ - некоторые функции координаты r .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-23) преобразуют систему уравнений (1-10) с тремя аргументами r , φ , z в систему уравнений с одним аргументом r и неизвестными функциями $j(r)$, $h(r)$, $e(r)$, $m(r)$.

В приложении 1 показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид (в приложении 1 см. (24, 27, 18, 31, 33, 34, 32) соответственно):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (24)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (25)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (26)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (27)$$

$$h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (28)$$

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (29)$$

$$\chi = \frac{\omega}{c} \quad (30)$$

Тем самым мы получили монохроматическое решение системы уравнений (1-10). Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье. Очевидно, если решение существует в цилиндрической системе координат, то оно существует и в любой иной системе координат.

Таким образом, мы получили общее решение уравнений Максвелла в вакууме.

3. Напряженности

Система уравнений (2.24-2.29) определена – имеется 6 уравнений для 4-х функций e_r , e_φ , h_r , h_φ и двух скаляров α , ω . Рассматривая эту систему, можно заметить, что она эквивалентна двум уравнениям (2.24, 2.25) для функций e_r , e_φ . Две другие функции h_r , h_φ определяются по (28, 29) и удовлетворяют уравнениям (26, 27).

Два дифференциальных уравнения (2.24, 2.25) могут быть решены при данных начальных условиях и данном α . Предварительно рассмотрим уравнение вида

$$\frac{ay}{x} + y' = 0, \tag{1}$$

Решения этого уравнения имеют вид:

$$y = x^{-a}, \tag{2}$$

$$y = 0. \tag{2a}$$

Уравнения (2.24, 2.25) могут быть заменены уравнениями вида

$$(e_r + e_\varphi)' + \frac{(e_r + e_\varphi)}{r}(1 - \alpha) = 0, \tag{3}$$

$$(e_r - e_\varphi)' + \frac{(e_r - e_\varphi)}{r}(1 + \alpha) = 0, \tag{4}$$

В соответствии с (1, 2) находим для (3):

$$(e_r + e_\varphi) = Ar^{\alpha-1}, \tag{5}$$

$$(e_r + e_\varphi) = 0. \tag{5a}$$

В соответствии с (1, 2) находим для (4):

$$(e_r - e_\varphi) = Ar^{-\alpha-1}. \tag{6}$$

$$(e_r - e_\varphi) = 0. \tag{6a}$$

Здесь $(A/2)$ – амплитуда напряженности. Таким образом, допустимы несколько решений уравнений (3, 4). В дальнейшем мы рассмотрим решение (5, 6a). Из (5) и (6a) следует:

$$e_r = e_\varphi = 0.5A \cdot r^{\alpha-1}. \tag{7}$$

При этом

$$(e_r^2 + e_\varphi^2) = A \cdot r^{2(\alpha-1)}. \tag{10}$$

На рис. 1 показаны, например, графики функций (7, 10) при $A = -1$, $\alpha = 0.8$.

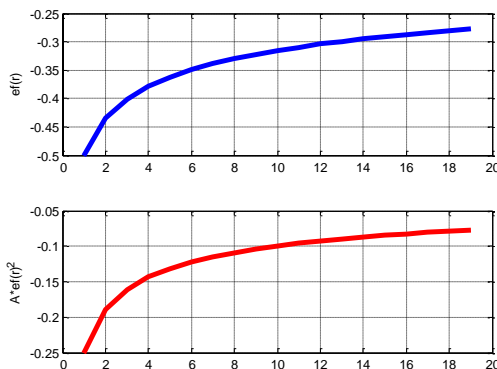


Fig.1. SecondSolMax.m

На рис. 2 показаны векторы напряженностей, исходящие из точки $A(r, \varphi)$. Напомним, что проекции $h_\varphi(r) = e_r(r)$ и $h_r(r) = -e_\varphi(r)$ - см. (2.28, 2.29). Направления векторов $e_r(r)$ и $e_\varphi(r)$ выбраны так: $e_r(r) > 0$, $e_\varphi(r) < 0$. При этом векторы E , H всегда ортогональны. Сумма модулей этих векторов определяется из (2.17, 2.18, 2.20, 2.21, 2.28, 2.29) и равна

$$W = E^2 + H^2 = (e_r(r)si)^2 + (e_\varphi(r)si)^2 + (h_r(r)co)^2 + (h_\varphi(r)co)^2$$

или

$$W = (e_r(r))^2 + (e_\varphi(r))^2 \quad (18)$$

- см. также (10) и рис. 1. Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны постоянна на всех точках окружности данного радиуса.

Решение существует и при измененных знаках функций (2.11, 2.21). Этому случаю соответствует рис. 3. Рис. 2 и рис. 3 иллюстрируют то, что возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны.

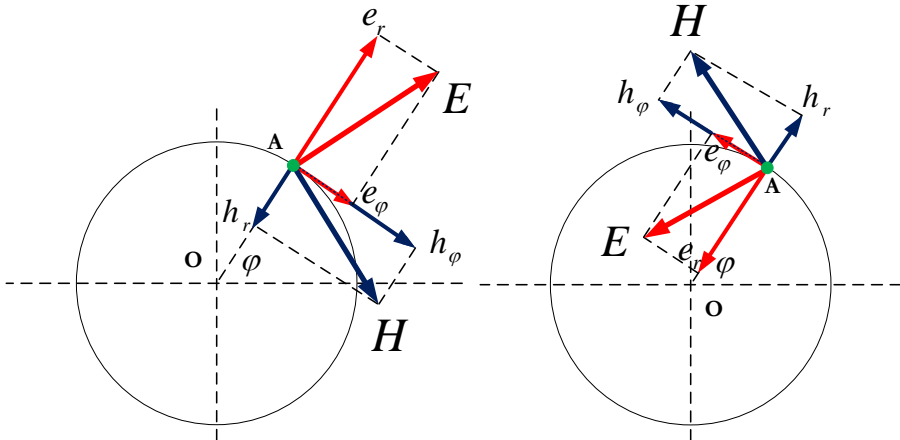


Рис. 2.

Рис. 3.

На рис. 4 для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны (2.13-2.23) показаны функции

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)$$

или эквивалентные им при $z = ct$ функции

$$co = \cos\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right), \quad si = \sin\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right).$$

При $\varphi = 0$, $2\omega/c = 0.1$ эти функции принимают вид $co = \cos(z)$, $si = \sin(z)$ и показаны на рис. 4.

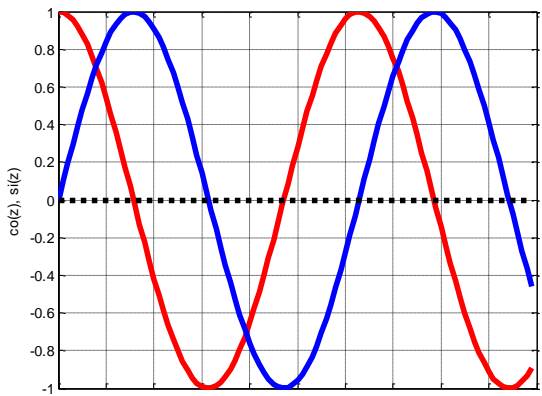


Fig.4. SecondSolMax.m

3. Поток энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \tag{1}$$

где

$$\eta = c/4\pi. \tag{2}$$

В цилиндрических координатах r, φ, z плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты S_r, S_φ, S_z , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Из (2.12-2.17, 3.4) следует, что поток, проходящий через данное сечение волны в данный момент времени,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \overline{S_r} \\ \overline{S_\varphi} \\ \overline{S_z} \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (6)$$

В приложении 1 показано, что $h_z(r) = 0$, $e_z(r) = 0$. Следовательно, $s_r = 0$, $s_\varphi = 0$, т.е. поток энергии распространяется только вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S} = \bar{S}_z = \eta \iint_{r, \varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

Отсутствие потока энергии по радиусу означает, что область существования волны **НЕ расширяется**. Подтверждением этому является существование лазера.

Найдем s_z . Из (2.28, 2.29) получаем:

$$e_r h_\varphi = e_r^2, \quad (8)$$

$$e_\varphi h_r = -e_\varphi^2. \quad (9)$$

Из (7, 8, 9) получаем:

$$s_z = (e_r^2 + e_\varphi^2). \quad (10)$$

Таким образом,

$$\bar{S} = \eta \iint_{r, \varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (11)$$

Отсюда, как показано в приложении 2, следует, что

$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (\cos(4\alpha\pi) - 1) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (12)$$

Из (10, 3.12) находим:

$$\bar{S} = \frac{cA}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (r^{2(\alpha-1)}) dr. \quad (12a)$$

Пусть R – радиус крутового фронта волны. Тогда

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^R (r^{2(\alpha-1)}) dr = \frac{R^{(2\alpha-1)}}{(2\alpha-1)}, \quad (13)$$

$$S_{\text{alfa}} = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)), \quad (14)$$

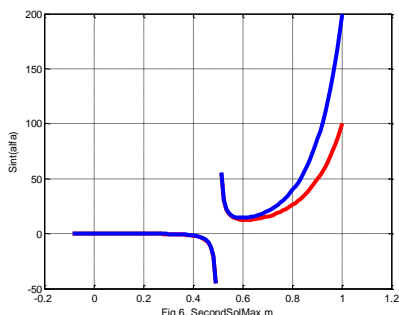
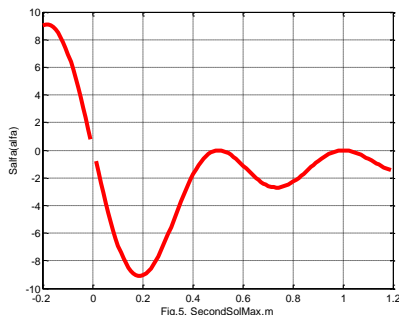
$$\bar{S} = \frac{cA}{16\pi} S_{\text{alfa}} S_{\text{int}}. \quad (15)$$

На рис. 5 показана функция $S_{\text{alfa}}(\alpha)$ (13), а на рис. 6 показана функция $S_{\text{int}}(\alpha)$. На рис. 6 верхняя и нижняя кривые относятся

соответственно к $R = 200$ и $R = 100$. Из формулы (15), рис. 5 и рис 6 видно, что поток энергии является положительным, например, при $A = -1$, $\alpha = 0.8$.

Поскольку поток энергии и энергия связаны соотношением $S = W \cdot c$, то из (15) можно найти энергию единицы длины волны:

$$\bar{W} = \frac{A}{16\pi} S_{\alpha f a} S_{\text{int}}. \tag{17}$$



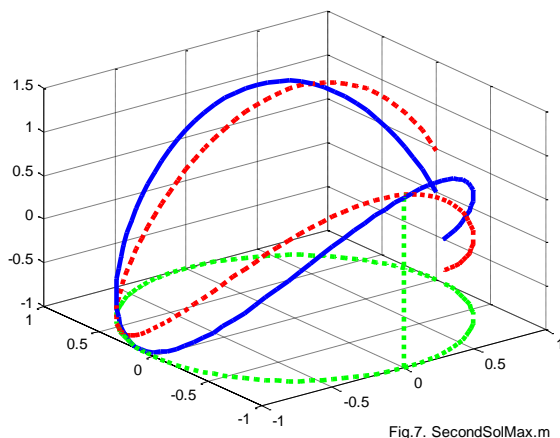
В приложении 2 показано также, что плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = (e_r^2 + e_\phi^2) \sin(2\alpha\varphi + 4\alpha z/c). \tag{18}$$

Отсюда и из (3.10) следует:

$$\bar{S}_{rz} = A \cdot r^{2(\alpha-1)} \sin(2\alpha\varphi + 4\alpha z/c). \tag{19}$$

На рис. 7 показаны эти функции при $A = 1$, $\alpha = 0.8$, $r = 1$ и двух значениях второго слагаемого: 0, 0.5 – см. сплошную и пунктирную линии соответственно.



Отсюда следует, что

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению волны;
- эта картина вращается при перемещении по оси OZ ;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от t , φ , z ; главное, что эта величина не изменяется во времени, и это соответствует закону сохранения энергии.

5. Обсуждение

Полученное решение описывает волну. Его основные отличия от известного решения состоят в следующем:

1. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии **не** изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.
2. Поток энергии имеет положительное значение.
3. Поток энергии распространяется вдоль волны
4. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат r , φ , z сдвинуты по фазе на четверть периода.
5. Решение для магнитных и электрических напряженностей является вещественным.
6. Решение существует при постоянной скорости распространения волны.
7. Область существования волны **не** расширяется, что подтверждается существованием лазера.
8. Векторы электрической и магнитной напряженностей ортогональны.
9. Возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны
10. Волна и ее энергия определены, если заданы параметры A , ω , R , α . При данных R , \bar{S} может быть найден параметр α .

Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.10) в виде функций (2.13-2.23). Далее производные по r будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.10) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \tag{1}$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi = m_r(r), \tag{2}$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) = m_\varphi(r), \tag{3}$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = m_z(r), \tag{4}$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \tag{6}$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \tag{7}$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - j_z(r) = 0, \tag{8}$$

$$j_r = \frac{\omega}{c} e_r, \quad j_\varphi = -\frac{\omega}{c} e_\varphi, \quad j_z = -\frac{\omega}{c} e_z, \tag{9}$$

$$m_r = \frac{\omega}{c} h_r, \quad m_\varphi = -\frac{\omega}{c} h_\varphi, \quad m_z = -\frac{\omega}{c} h_z, \tag{10}$$

Умножим (8) на $(-\chi)$ и учтем (9). Тогда получим:

$$-\frac{\chi \cdot h_\varphi(r)}{r} - \chi \cdot h'_\varphi(r) - \frac{\chi \cdot h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\chi \omega}{c} \cdot e_z(r) = 0, \tag{11}$$

или

$$\frac{c\chi}{\omega} \frac{h_\varphi(r)}{r} + \frac{c\chi}{\omega} h'_\varphi(r) + \frac{c\chi}{\omega} \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \tag{12}$$

Сравнивая (1) и (12), замечаем, что они совпадают, если

$$\frac{c\chi}{\omega} h_\varphi(r) = e_r(r), \tag{13}$$

$$-\frac{c\chi}{\omega} h_r(r) = e_\varphi(r). \tag{14}$$

Важно отметить, что такое сравнение справедливо только при $e_z(r) \neq 0$. При этом в соответствии с (9) и $j_z(r) \neq 0$.

В уравнениях (13, 14) сделаем замену в соответствии с (9):

$$\chi h_\varphi(r) = -j_r(r), \tag{15}$$

$$-\chi h_r(r) = j_\varphi(r). \tag{16}$$

Уравнения (15, 16) совпадают с (6, 7) при $h_z(r) = 0$. Отсюда следует

Лемма 1. При $e_z(r) \neq 0$ система уравнений (1, 5-9) совместима только в том случае, когда $h_z(r) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $e_z(r) = 0$. При этом в соответствии с (9) получим $j_z(r) = 0$. Тогда исходная система (1, 5-8) примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (17)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (19)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (20)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (21)$$

Подставим (9) в (17). Тогда получим:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (22)$$

Подставим (19, 20) в (22). Тогда получим:

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \frac{1}{r} \cdot h'_z(r) \alpha - h'_\varphi(r) \chi + (-h_r(r) \chi - h'_z(r)) \frac{\alpha}{r} = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi - h'_\varphi(r) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0 \quad (23)$$

При этом для вычисления трех напряженностей получим три уравнения (19, 21, 23). Исключим $h'_\varphi(r)$ из (21, 23):

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \left(\frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) + h_r(r) \frac{\alpha}{r} \right) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0$$

или $\frac{-1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha = 0$ или $h_z(r) = 0$. Таким образом, и при $e_z(r) = 0$

должно соблюдаться условие $h_z(r) = 0$. Отсюда следует

Лемма 2. При $e_z(r) = 0$ система уравнений (1, 5-9) совместима только в том случае, когда $h_z(r) = 0$.

Из леммы 1 и леммы 2 следует

Лемма 3. Система уравнений (1, 5-9) совместима только при $h_z(r) = 0$ и, в соответствии с (10), $m_z(r) = 0$. Однако допустим случай, когда $e_z(r) \neq 0$ и $j_z(r) \neq 0$.

При $e_z(r) = 0$ и $h_z(r) = 0$ уравнения (1, 5-9) принимают следующий вид - уравнения (1, 5, 8) упрощаются, а уравнения (6, 7) заменяются уравнениями (13, 14):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{c\chi}{\omega} h_\varphi(r) = e_r(r), \tag{3.3}$$

$$-\frac{c\chi}{\omega} h_r(r) = e_\varphi(r), \tag{3.4}$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \tag{3.5}$$

Аналогично доказывается

Лемма 4. Система уравнений (1-5, 10) совместима только при $e_z(r) = 0$ и, в соответствии с (9), $j_z(r) = 0$. При этом аналогично формулам (24, 28) получаем формулы

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \tag{4.1}$$

$$e_\varphi(r)\chi = -\frac{\omega}{c} h_r(r), \tag{4.2}$$

$$e_r(r)\chi = \frac{\omega}{c} h_\varphi(r), \tag{4.3}$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0. \tag{4.5}$$

Из леммы 3 и леммы 4 следует

Лемма 5. Система уравнений (1-10) совместима только при $h_z(r) = 0$, $e_z(r) = 0$, $m_z(r) = 0$, $j_z(r) = 0$.

Следовательно, исходная система уравнений (1-10) принимает вид уравнений, перечисленных в леммах 3 и 4. Объединим их для удобства читателя:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \tag{24}$$

$$e_\varphi(r)\chi = -\frac{\omega}{c} h_r(r), \tag{25}$$

$$e_r(r)\chi = \frac{\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (26)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (27)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (28)$$

$$h_\varphi(r)\chi = \frac{\omega}{c} e_r(r), \quad (29)$$

$$-h_r(r)\chi = \frac{\omega}{c} e_\varphi(r), \quad (30)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (31)$$

Умножим уравнения (26, 29). Тогда получим:

$$-e_r(r)h_\varphi(r)\chi^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e_r(r)h_\varphi(r)$$

или

$$\chi = \omega/c. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (26, 29), получаем:

$$h_\varphi(r) = e_r(r). \quad (33)$$

Таким образом, при условии (32) уравнения (26, 29) эквивалентны одному уравнению (33). Аналогичное соотношение следует из (25, 30):

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (34)$$

Итак, система уравнений (24-31) эквивалентна системе уравнений (24, 27, 28, 31-34).

Приложение 2.

В (3.11) показано, что поток энергии, проходящий через сечение волны,

$$\bar{S} = \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (1)$$

Пусть скорость распространения волны постоянна и равна c . Тогда

$$z = ct. \quad (2)$$

Тогда из (2, 2.11, 2.12, 2.30) получаем:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \alpha t) = \cos(\alpha\varphi + (2\omega/c)z) \quad (3)$$

и, аналогично,

$$si = \sin(\alpha\varphi + (2\omega/c)z). \quad (4)$$

Имея в виду (3, 4), перепишем (1) в виде:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta \iint_{r, \varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2(\alpha\varphi + (2\omega/c)z))] dr d\varphi. \quad (5)$$

Таким образом, плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = (e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi + 4\omega z/c). \quad (5a)$$

При $z=0$ на оси OZ имеем:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta \iint_{r, \varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi)] dr d\varphi. \quad (6)$$

Далее из (6) находим:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{2} \int_r \left((e_r^2 + e_\varphi^2) \left(\int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) d\varphi \right) dr \right). \quad (7)$$

Имеем:

$$\int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\alpha} (1 - \cos(4\pi\alpha)). \quad (8)$$

Из (7, 8) получаем:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{4\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \iint_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (9)$$

Подставляя сюда (3.2), окончательно получаем:

$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \iint_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (10)$$

Очевидно, при любом выборе точки $z=0$ на оси OZ последнее соотношение сохраняется.

Литература

1. Канн К.Б. Электродинамика. Электромагнитные волны, <http://electrodynamics.narod.ru/em-waves.html>
2. Ток смещения и система уравнений Максвелла, <http://www.webpolitech.ru/subj/dinamo/767-25-tok-smeshheniya-i-sistema-uravnenij-maksvellla.html>
3. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.
4. Хмельник С.И. Второе решение уравнений Максвелла, архив 'vixra Funding', <http://vixra.org/abs/1601.0292>, 26.01.2016.