Хмельник С.И.

Принцип экстремума полного действия в некоторых областях физики

Аннотация

Предложен новый вариационный принцип экстремума полного действия, который расширяет лагранжев формализм на диссипативные системы. Этот принцип применим в электротехнике, механике с учетом сил трения, электродинамике, гидродинамике.

Предлагаемый вариационный принцип может рассматриваться как новый формализм универсального метода вывода физических уравнений, а также как метод решения этих уравнений. Формализм состоит в построении функционала с единственной седловой линией, уравнение которой и является уравнением динамических переменных для определенной области физики. Метод решения состоит в поиске глобальной седловой линии при заданных условиях физической задачи.

Оглавление

Введение

Ранее автором был предложен новый вариационный принцип экстремума полного действия, который расширяет лагранжев формализм на диссипативные системы. В нескольких работах [1, 2, 6-24] было показано, что этот принцип применим в электротехнике, механике с учетом сил трения, электродинамике, гидродинамике. Здесь указанные работы кратко обобщаются.

Указанный вариационный принцип экстремума позволяет конструировать функционал для различных физических систем и, что самое важное, для диссипативных систем. Этот функционал имеет глобальную седловую точку и поэтому для расчета физических систем с таким функционалом можно применить метод градиентного спуска к седловой точке. Поскольку глобальный экстремум существует, то и решение существует всегда.

Первоначальный шаг в построении такого функционала состоит в том, что для некоторой физической системы записывается уравнение сохранения энергии или уравнение баланса мощностей. При этом учитываются и потери энергии (например, на трение или нагрев), и поток энергии в систему и из нее.

1. Формулировка принципа

Широко известен лагранжев формализм – универсальный метод вывода физических уравнений из принципа наименьшего действия. При этом действие определяется как определенный интеграл - функционал

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \left(K(q) - P(q)\right) dt \qquad (1)$$

от разности кинетической $K(q)$ и потенциальной $P(q)$ энергий, называемой лагранжианом

$$\Lambda(q) = K(q) - P(q). \qquad (2)$$

Здесь интеграл берется на определенном интервале времени $t_1 \le t \le t_2$, а q - вектор обобщенных кординат, динамических переменных, которые, в свою очередь, зависят от времени. Принцип наименьшего действия утверждает, что экстремали этого функционала (т.е. уравнения, при которых он принимает минимальное значение) являются уравнениями реальных динамических переменных (т.е. реализуемых в действительности).

Например, если энергия системы зависит только от функций q и их производных от времени q', то экстремаль определяется по формуле Эйлера [4]

$$\frac{\partial(K-P)}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K-P)}{\partial q'}\right)=0. \qquad (3)$$

Лагранжев формализм применим к тем системам, в которых сохраняется постоянной полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий). Он не отражает тот факт, что в реальных системах полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий) при движении убывает, переходя в другие виды энергии, например, в тепловую энергию Q, т. е. происходит диссипация энергии. Отсутствие для диссипативных систем (т.е. систем с рассеиванием энергии) формализма, аналогичного лагранжеву формализму, кажется странным: при этом физический мир оказывается разделенным на гармоничную (с принципом наименьшего действия) часть и на хаотичную ("беспринципгую") часть.

Автор предлагает **принцип экстремума полного действия**, применимого к диссипативным системам. Полным действием предлагается называть определенный интеграл - функционал

$$\Phi(q)=\int_{t_1}^{t_2}\Re(q)dt \qquad (4)$$

от величины

$$\Re(q)=\left(K(q)-P(q)-Q(q)\right), \qquad (5)$$

которую будем называть энержианом (по аналогии с лагранжианом). В нем $Q(q)$ - тепловая энергия. Далее рассматривается квазиэкстремаль полного действия, имеющая вид

$$\frac{\partial(K-P)}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K-P)}{\partial q'}\right)-\frac{\partial Q}{\partial q}=0. \qquad (6)$$

Функционал (4) принимает (*определенное далее*) экстремальное значение на квазиэкстремалях. Принцип экстремального полного действия утверждает, что квазиэкстремали этого функционала являются уравнениями реальных динамических процессов.

Сразу же надо отметить, что экстремали функционала (4) совпадают с экстремалями функционала (1) - член, соответствующий $Q(q)$, исчезает.

Определим экстремальное значение функционала (4, 5). Для этого "расщепим" (т.е. заменим) функцию $q(t)$ на две независимые функции $x(t)$ и $y(t)$, а функционалу (4) поставим в соответствие функционал

$$\Phi_2(x,y)=\int_{t_1}^{t_2}\Re_2(x,y)dt, \tag{7}$$

который будем называть "расщепленным" полным действием. Функцию $\Re_2(x,y)$ будем называть "расщепленным" энержианом. Этот функционал минимизируется по функции $x(t)$ при фиксированной функции $y(t)$ и максимизируется по функции $y(t)$ при фиксированной функции $x(t)$. Минимум и максимум являются единственными. Таким образом, экстремум функционала (7) является седловой линией, где одна группа функций x_o минимизирует функционал, а другая y_o - максимизирует его. Сумма пары оптимальных значений расщепленных функций дает искомую функцию $q=x_o+y_o$, удовлетворяющую уравнению квазиэкстремали (6). Другими словами, квазиэкстремаль функционала (4) является суммой экстремалей x_o, y_o функционала (7), определяющих седловую точку этого функционала. Важно отметить, что эта точка является единственной экстремальной точкой – нет других седловых точек и нет других точек минимума или максимума. В этом заключается смысл выражения "экстремальное значение на квазиэкстремалях". Наше **утверждение 1** заключается в том, что

> в каждой области физики можно найти соответствие между полным действием и расщепленным полным действием, а тем самым доказать, что полное действие принимает глобальное экстремальное значение на квазиэкстремалях.

Рассмотрим правомерность этого утверждения 1 для некоторых областей физики.

2. Электротехника

Полное действие в электротехнике имеет вид (1.4, 1.5), где

$$K(q)=\frac{Lq'^2}{2},\ \ P(q)=\left(\frac{Sq^2}{2}-Eq\right),\ \ Q(q)=Rq'q. \qquad (1)$$

Здесь штрих обозначает производную, q - вектор функций-зарядов от времени, E - вектор функций-напряжений от времени, L - матрица индуктивностей и взаимоиндуктивностей, R - матрица сопротивлений, S - матрица обратных емкостей, а функции $K(q),\ P(q),\ Q(q)$ представляют магнитную, электрическую и тепловую энергии соответственно. Здесь и далее векторы и матрицы рассматриваются в смысле векторной алгебры, при этом операции с ними записываются в сокращенном виде. Так, произведение векторов представляет собой произведение вектора-столбца на вектор-строку, а квадратичная форма вида, например, $Rq'q$ представляет собой произведение вектора-строки q' на квадратную матрицу R и на вектор-столбец q.

Уравнение квазиэкстремали в этом случае принимает вид

$$Sq+Lq''+Rq'-E=0. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (1.5), запишем энержиан (1.5) в развернутом виде:

$$\Re(q)=\left(\frac{Lq'^2}{2}-\frac{Sq^2}{2}+Eq-Rq'q\right). \qquad (3)$$

Представим расщепленный энержиан в виде

$$\Re_2(x,y)=\begin{bmatrix}\left(Ly'^2-Sy^2+Ey-Rx'y\right)- \\ \left(Lx'^2-Sx^2+Ex-Rxy'\right)\end{bmatrix}. \qquad (4)$$

При этом экстремали интеграла (1.7) по функциям $x(t)$ и $y(t)$, найденные по уравнению Эйлера, примут соответственно вид:

$$2Sx+2Lx''+2Ry'-E=0, \qquad (5)$$

$$2Sy+2Ly''+2Rx'-E=0. \qquad (6)$$

Из симметрии уравнений (5, 6) следует, что оптимальные функции x_0 и y_0, удовлетворяющие этим уравнениям, удовлетворяют также условию

$$x_0 = y_0. \tag{7}$$

Складывая уравнения (5) и (6), получаем уравнение (2), где

$$q = x_o + y_o. \tag{8}$$

В [1, 2] показано, что условия (5, 6) являются необходимыми для существования единственной седловой линии. В [1, 2] показано также, что достаточным условием для этого является знакоопределенность матрицы L, что выполняется в любой электрической цепи.

Таким образом, утверждение 1 для электротехники доказано. Из этого следует также, **утверждение 2**:

> любой физический процесс, описываемый уравнением вида (2), удовлетворяет принципу экстремума общего действия.

3. Механика

Здесь рассмотрим только один пример - прямолинейное движение тела массой m под действием движущей силы f и силы торможения kq', где k - известный коэффициент, q - координата тела. Известно, что

$$f = mq'' + kq'. \tag{1}$$

В этом случае кинетическая, потенциальная и тепловая энергии имеют соответственно вид:

$$K(q) = mq'^2 / 2, \quad P(q) = -fq, \quad Q(q) = kqq'. \tag{2}$$

Запишем энержиан (1.5) для этого случая:

$$\Re(q) = mq'^2 / 2 + fq - kqq'. \tag{3}$$

Уравнение квазиэкстремали в этом случае принимает вид (1).
Представим расщепленный энержиан в виде

$$\Re_2(x, y) = \begin{bmatrix} \left(my'^2 + fy - kx'y\right) - \\ \left(mx'^2 + fx - kxy'\right) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Можно заметить аналогию между энержианами для электротехники и для этого примера, откуда следует, что утверждение 1 для этого примера доказано. Впрочем, это же непосредственно следует из утверждения 2.

4. Электродинамика

4.0. Вступление

Известно [3], что уравнения Максвелла выводятся из принципа наименьшего действия. Для этого вводится понятие векторного магнитного потенциала и формулируется некоторый функционал относительно такого потенциала и скалярного электрического потенциала, называемый действием. Затем варьированием действия по векторному магнитному потенциалу и скалярному потенциалу находится условие минимума этого функционала. Далее показывается (после определенных преобразований), что это условие (оноcительно потенциалов) эквивалентно системе уравнений относительно электрической и магнитной напряженностей. Полученная система уравнений совпадает **только с четырьмя** уравнениями Максвелла. Это естественно, поскольку векторный магнитный потенциал и электрический скалярный потенциал доставляют только четыре варьируемые функции. Однако такой частичный результат почему-то позволяет авторам сделать вывод о том, что **все** уравнения Максвелла (оноcительно напряженностей) являются следствием принципа наименьшего действия, как определенного выше функционала. Но из этого функционала **не** следуют **все** уравнения Максвелла!

Кроме того, в уравнениях Максвелла учавствуют токи в среде с определенной электропроводностью. Следовательно, есть тепловые потери, есть еще и потери на поляризацию и намагниченность среды, т.е. диссипация энергии. Это означает, что кроме электромагнитной энергии в функционал для принципа минимума действия должна быть включена тепловая энергия, которая **не** входит в лагранжиан. Следовательно, лагранжев формализм для уравнений Максвелла не применим в принципе.

Поэтому указанный вывод, имея познавательную ценность, не демонстрирует торжество принципа наименьшего действия. И, уж тем более, нельзя воспользоваться этим функционалом для непосредственного решения технических задач (используя метод спуска по функционалу). Лагранжев формализм для вывода уравнений Максвелла оказывается недостаточным.

Дело усложняется еще и тем, что в симметричной форме уравнений Максвелла (при наличии и магнитных, и электрических зарядов) электромагнитное поле не может быть описано при помощи вектор-потенциала, непрерывного во всём пространстве. Поэтому симметричные уравнения Максвелла не выводятся из вариационного принципа наименьшего действия, где действие является интегралом разности кинетической и потенциальной энергии.

Здесь рассматривается такой функционал относительно напряженностей, у которого первые вариации по напряженностям при обращении в нуль совпадают с уравнениями Максвелла относительно напряженностей.

Далее мы вместо принципа экстремума общего действия <u>относительно энергий</u> будем рассматривать аналогичный ему принцип экстремума общего действия <u>относительно мощностей</u>.

4.1. Баланс мощности элетромагнитного поля

Известно [5] уравнение баланса мощности элетромагнитного поля в дифференциальной форме, имеющее вид

$$P_\Pi + P_{EH} + P_Q + P_C = 0, \tag{1}$$

где

P_Π - плотность потока мощности через некоторую поверхность,

P_{EH} - плотность электромагнитной мощности электромагнитного поля,

P_Q - плотность мощности тепловых потерь,

P_C - плотность мощности посторонних источников тока.

При этом

$$P_\Pi = \mathrm{div}[E \times H] \tag{2}$$

или, в соответствии с известной формулой векторного анализа,

$$P_\Pi = E \cdot \mathrm{rot}(H) - H \cdot \mathrm{rot}(E), \tag{3}$$

$$P_{EH} = \mu H \frac{dH}{dt} + \varepsilon E \frac{dE}{dt}, \tag{4}$$

$$P_Q = J_1 E, \tag{5}$$

$$P_C = J_2 E, \tag{6}$$

где

ε - абсолютная диэлектрическая проницаемость,

μ - абсолютная магнитная проницаемость,

J_1 - плотность тока проводимости,

J_2 - плотность тока постороннего источника тока.

Здесь и далее трехкомпонентные векторы

$$H,\ \frac{dH}{dt},\ E,\ \frac{dE}{dt},\ J_1,\ J_2,\ \mathrm{rot}(H),\ \mathrm{rot}(E)$$

рассматриваются как векторы в смысле векторной алгебры. При этом операции умножения с ними записываются в упрощенном виде. Так, произведение векторов $E \cdot \mathrm{rot}(H)$ представляет собой произведение вектора-столбца E на вектор-строку $\mathrm{rot}(H)$.

Обозначим

$$J = J_1 + J_2, \tag{7}$$

$$P_J = P_Q + P_C. \tag{8}$$

$$J = \mathrm{grad}(K), \tag{9}$$

где K – скалярный потенциал. Из (5-9) следует, что мощность электрического тока

$$P_J = E \cdot \mathrm{grad}(K). \tag{10}$$

Заряды в поле скалярного потенциала обладают потенциальной энергией. Соответствующая мощность

$$P_\rho = K\rho/\varepsilon,$$

(11)

где ρ - плотность распределения суммарных (свободных и сторонних) зарядов.

Предположим теперь, что существуют магнитные заряды с плотностью распределения σ и магнитные токи

$$M = \mathrm{grad}(L), \tag{12}$$

где L – скалярный магнитный потенциал. Тогда в силу симметрии следует предположить, что существует <u>мощность магнитного тока</u>

$$P_M = H \cdot \mathrm{grad}(L), \tag{13}$$

потенциальная энергия магнитных зарядов и соответствующая мощность

$$P_\sigma = L\sigma/\mu, \tag{14}$$

где σ - плотность распределения магнитных зарядов.

Обозначим еще <u>суммарную мощность токов</u> (электрических и магнитных)

$$P_{JM} = P_J + P_M. \tag{15}$$

и суммарную мощность зарядов (электрических и магнитных)

$$P_{\rho\sigma} = P_\rho + P_\sigma. \tag{16}$$

Тогда уравнение баланса мощности элетромагнитного поля в дифференциальной форме принимает вид

$$P_{\Pi} + P_{EH} + P_{JM} + P_{\rho\sigma} = 0, \qquad (18)$$

где слагаемые определяются по (3, 4, 15, 16) соответственно.

4.2. Построение функционала для уравнений Максвелла

Рассматривается электромагнитное поле в объеме V, ограниченном поверхностью S. Полное действие в электродинамике имеет вид

$$\Phi = \int_0^T \left\{ \oint_V \left\{ P_{EH} - P_{JM} - P_{\rho\sigma} \right\} dV - \oint_S \Pi dS \right\} dt, \qquad (21)$$

Здесь имеется в виду, что объемная плотность мощности электромагнитного поля P_{EH} определяется по (4), объемная плотность суммарной мощности токов определяется по (15, 16), а вектор Пойнтинга

$$\Pi = \left[E \times H \right]. \qquad (22)$$

При этом первое слагаемое является мощностью электромагнитного поля в объеме V, второе слагаемое является мощностью токов в объеме V, а третье – мгновенное значение плотности потока мощности через поверность S.

По теореме Остроградского имеем:

$$\oint_V \operatorname{div}\left[E \times H \right] dV = \oint_S \left[E \times H \right] dS. \qquad (23)$$

Учитывая формулы (2, 22), из (21) получаем:

$$\Phi = \int_0^T \left\{ \oint_z \left\{ \oint_y \left\{ \oint_x \left\{ P_{EH} - P_{\Pi} - P_{JM} - P_{\rho\sigma} \right\} dx \right\} dy \right\} dz \right\} dt \qquad (24)$$

или

$$\Phi = \int_0^T \left\{ \oint_z \left\{ \oint_y \left\{ \oint_x \Re(q(x,y,z,t) dx \right\} dy \right\} dz \right\} dt, \qquad (25)$$

где q - вектор неизвестных функций (E, H, K, L), а энержиан для электродинамики имеет вид

$$\Re(q) = \left\{ P_{EH} - P_{\Pi} - P_{JM} - P_{\rho\sigma} \right\}. \qquad (26)$$

Учитывая формулы (4, 3, 18), получаем:

$$\Re(q)=\left\{\begin{array}{l} H\cdot\mathrm{rot}(E)-E\cdot\mathrm{rot}(H)+\mu H\dfrac{dH}{dt}+\varepsilon E\dfrac{dE}{dt}- \\ -\left(E\cdot\mathrm{grad}(K)+\dfrac{K\rho}{\varepsilon}\right)-\left(H\cdot\mathrm{grad}(L)+\dfrac{L\sigma}{\mu}\right)\end{array}\right\}. \qquad (27)$$

Напомним, что необходимые условия экстремума функционала от функций нескольких независимых переменных – уравнения Остроградского [4] имеют для каждой функци вид

$$\frac{\partial_O f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}-\sum_{a=x,y,z,t}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial f}{\partial(dv/da)}\right)\right]=0, \qquad (27а)$$

где f – подынтегральное выражение, $v(x,y,z,t)$ – переменная функция, a - независимая переменная.

Рассмотрим вектор неизвестных скалярных функций четырех переменных (x,y,z,t):

$$q=\lfloor E_x,E_y,E_z,H_x,H_y,H_z,K,L\rfloor. \qquad (27в)$$

Запишем уравнение квазиэкстремали функционала (27) для каждой i -компоненты q_i вектора q

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial P_{JM}}{\partial q_i}-\sum\limits_{a=x,y,z,t}\left[\dfrac{d}{da}\left(\dfrac{\partial P_{JM}}{\partial[dq_i/da]}\right)\right] \\ +\dfrac{\partial P_{\rho\sigma}}{\partial q_i}+\dfrac{\partial P_{\Pi}}{\partial q_i}+\dfrac{\partial P_{EH}}{\partial q_i}\end{array}\right\}=0. \qquad (28)$$

Первые четыре слагаемые тут соответствует формуле (27а), а два других являются обычными частными производными. Дифференцируя по неизвестным функциям в соответствии с (28) и объединяя затем три проекции в соответствующий вектор, получаем:

- по переменной $E=\lfloor E_x,E_y,E_z\rfloor$:

$$-\mathrm{rot}H+\varepsilon\frac{dE}{dt}=\mathrm{grad}(K)=0, \qquad (29)$$

- по переменной $H=\lfloor H_x,H_y,H_z\rfloor$:

$$\mathrm{rot}E+\mu\frac{dH}{dt}+\mathrm{grad}(L)=0, \qquad (30)$$

- по переменным K, L соответственно:

$$\left(\mathrm{div}E - \frac{\rho}{\varepsilon}\right) = 0, \quad \left(\mathrm{div}H - \frac{\sigma}{\mu}\right) = 0, \qquad (31)$$

Замечаем, что эти уравнения являются симметричными уравнениями Максвелла (поскольку в них входят еще магнитные заряды, скалярные потенциалы и токи).

4.3. Расщепление функционала для уравнений Максвелла

Функционалу (25) поставим в соответствие функционал расщепленного полного действия

$$\Phi_2 = \int_0^T \left\{ \oint_z \left\{ \oint_y \left\{ \oint_x \Re_2(q', q'') dx \right\} dy \right\} dz \right\} dt, \qquad (32)$$

Представим расщепленный энержиан в виде

$$\Re_2(q', q'') = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(H' \cdot \mathrm{rot}(E') + E' \cdot \mathrm{rot}(H')\right) \\ -\frac{1}{2}\left(H'' \cdot \mathrm{rot}(E'') + E'' \cdot \mathrm{rot}(H'')\right) + \\ \frac{\mu}{2}\left(H' \frac{dH''}{dt} - H'' \frac{dH'}{dt}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\left(E' \frac{dE''}{dt} - E'' \frac{dE'}{dt}\right) \\ -\left(E' \cdot \mathrm{grad}(K') + \frac{K'\rho}{\varepsilon}\right) + \left(E'' \cdot \mathrm{grad}(K'') + \frac{K''\rho}{\varepsilon}\right) \\ -\left(H' \cdot \mathrm{grad}(L') + \frac{L'\sigma}{\mu}\right) + \left(H'' \cdot \mathrm{grad}(L'') + \frac{L''\sigma}{\mu}\right) \end{array} \right\} \qquad (33)$$

В [1, 2] показано, что экстремали интеграла (32) по функциям q', q'', найденные по уравнению Остроградского, являются необходимыми и достаточными условиями существования единственной седловой линии, а оптимальные функции q'_o, q''_o, удовлетворяющие этим экстремалям, удовлетворяют также условию

$$q'_o = q''_o. \qquad (34)$$

Складывая эти экстремали, получаем систему уравнений Максвелла (29-31), где

$$q = q'_o + q''_o. \qquad (35)$$

- см. (27в). Таким образом, утверждение 1 для электродинамики доказано.

5. Гидродинамика

5.1. Уравнения гидродинамики

Уравнения гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости имеют следующий вид [25]:

$$\mathrm{div}(v) = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p - \mu \Delta v + \rho (v \cdot \nabla) v - \rho F = 0, \tag{2}$$

где

$\rho = \mathrm{const}$ - постоянная плотность,

μ - коэффициент внутреннего трения,

p - неизвестное давление,

$v = \lfloor v_x, v_y, v_z \rfloor$ - неизвестная скорость, вектор,

$F = \lfloor F_x, F_y, F_z \rfloor$ - известная массовая сила, вектор,

x, y, z, t - пространственные координаты и время.

5.2. Баланс мощности

Умов [26] рассмотрел для жидкости условие баланса удельных (по объему) мощностей в потоке жидкости. В [27] из этого условия найдено, что

$$P_1(v) + P_5(v) + P_4(p, v) = 0, \tag{3а}$$

а для вязкой и несжимаемой жидкости

$$P_1(v) + P_5(v) + P_2(p, v) = 0, \tag{3в}$$

где

$$P_1 = \frac{\rho}{2} \frac{\partial W^2}{\partial t}, \tag{4}$$

$$P_2 = \begin{Bmatrix} v_x\left(\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}\right)+ \\ v_y\left(\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}\right)+ \\ v_z\left(\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}\right) \end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$P_4 = v \cdot \nabla p, \tag{6}$$

$$P_5 = \frac{1}{2}\rho\left(v_x\frac{dW^2}{dx}+v_y\frac{dW^2}{dy}+v_z\frac{dW^2}{dz}\right), \tag{7}$$

где

$$W^2 = \left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right) \tag{7a}$$

p_{xy} и т.п. – напряжения.

Здесь P_1 - мощность изменения кинетической энергии, P_4 - мощность изменения работы давлений, P_5 - мощность изменения изменения энергии при изменении направления, а величина

$$P_7(p,v) = P_5(v) + P_4(p,v) \tag{8}$$

является, как показано Умовым, мощностью изменения потока энергии через заданный объем жидкости. В [25] показано, что для несжимаемой жидкости выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}\right) \\ \left(\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}\right) \\ \left(\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}\right) \end{vmatrix} = \nabla p - \mu \cdot \Delta v \tag{8a}$$

Отсюда следует, что

$$P_2 = v(\nabla p - \mu \cdot \Delta v) \tag{9}$$

или, с учетом (6),

$$P_2 = P_4 - P_3 \tag{9a}$$

где

$$P_3 = \mu \cdot v \cdot \Delta v \tag{10}$$

- мощность изменения потерь энергии на внутреннее трение при движении. Поэтому перепишем (3в) в виде

$$P_1(v) + P_5(v) + P_4(p, v) - P_3(v) = 0, \tag{10a}$$

Дополним еще условие (10а) мощностью массовых сил

$$P_6 = \rho F v. \tag{11}$$

Тогда для вязкой несжимаемой жидкости окончательно получим условие баланса мощностей в виде

$$P_1(v) + P_5(v) + P_4(p, v) - P_3(v) - P_6(v) = 0. \tag{12}$$

Учитывая (6), условие (1) перепишем в виде

$$P_4 = \operatorname{div}(v \cdot p), \tag{12a}$$

Условие (1) можно переписать в виде

$$P_5 = \operatorname{div}\left(v \cdot W^2\right). \tag{12в}$$

Из (12а, 12в) и формулы Остроградского находим:

$$\iiint\limits_V P_4 dV = \iiint\limits_V \operatorname{div}(v \cdot p) dV = \iint\limits_S p \cdot v_n \cdot dS, \tag{12.c}$$

$$\iiint\limits_V P_5 dV = \iiint\limits_V \operatorname{div}\left(v \cdot W^2\right) dV = \iint\limits_S W^2 \cdot v_n \cdot dS. \tag{12.д}$$

5.3. Энержиан и квазиэкстремаль

Для дальнейшего объединим неизвестные функции в вектор вида

$$q = [p, v] = \left[p, v_x, v_y, v_z\right]. \tag{13}$$

Этот вектор и все его компоненты являются функциями от (x, y, z, t). Рассматривается поток жидкости в объеме V. Полное действие в гидродинамике представим в виде

$$\Phi = \int_0^T \left\{ \oint_V \Re(q(x, y, z, t) dV \right\} dt, \tag{13a}$$

Имея в виду (12), запишем энержиан (1.5) в следующем виде:

$$\Re(q) = P_1(v) + P_3(v) - P_4(q) + P_5(v) - P_6(v). \tag{14}$$

Можно показать [27], что

$$P_1 = \rho \cdot v \frac{dv}{dt}, \tag{15a}$$

$$P_5 = \rho \cdot v \cdot G(v), \tag{15в}$$

где

$$G(v) = (v \cdot \nabla) v. \tag{16}$$

С учетом этого перепишем энержиан (14) в развернутом виде:

$$\Re(q) = \rho \cdot v \frac{dv}{dt} + \mu \cdot v \cdot \Delta v - \operatorname{div}(v \cdot p) + \rho \cdot v \cdot G(v) - \rho F v. \tag{17}$$

Далее будем обозначать производную, вычисляемую по формуле Остроградского, символом $\frac{\partial_o}{\partial v}$, в отличие от обычной частной производной $\frac{\partial}{\partial v}$. Тогда получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(P_1\left(v, \frac{dv}{dt}\right)\right) = \rho \frac{dv}{dt}; \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(P_3(v)\right) = \mu \cdot \Delta v; \\
&\frac{\partial_o}{\partial q}\left(P_4(q)\right) = \begin{vmatrix} -\operatorname{div}(v) \\ \nabla(p) \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(P_5(v, G(v))\right) = \rho (v \cdot \nabla) v; \\
&\frac{\partial_o}{\partial v}\left(P_6(v)\right) = \rho F.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

В соответствии с разделом 1 запишем квазиэкстремаль в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial v}\left(P_1\left(v, \frac{dv}{dt}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(P_3(v)\right) + \frac{\partial_o}{\partial q}\left(P_4(q)\right) \\ + \frac{\partial}{\partial v}\left(P_5(v, G(v))\right) - \frac{\partial_o}{\partial v}\left(P_6(v)\right) \end{bmatrix} = 0. \tag{23}$$

Из (22) следует, что квазиэкстремаль (23) после дифференцирования совпадает с уравнениями (1, 2).

5.4. Расщепленный энержиан

Рассмотрим расщепленные функции (13) в виде

$$q' = [p', v'] = \lfloor p', v'_x, v'_y, v'_z \rfloor, \tag{24}$$

$$q'' = [p'', v''] = \lfloor p'', v''_x, v''_y, v''_z \rfloor. \tag{25}$$

Представим расщепленный энержиан в виде [27]

$$\Re_2(q',q'')=\begin{Bmatrix} -\rho\cdot\left(v'\dfrac{dv''}{dt}-v''\dfrac{dv'}{dt}\right)-\mu\cdot\left(v'\Delta v'-v''\Delta v''\right) \\ +\left(\operatorname{div}\left(v'\cdot p''\right)-\operatorname{div}\left(v''\cdot p'\right)\right)+ \\ \rho\cdot\left(v'G(v'')-v''G(v')\right)-\rho\cdot F\left(v'-v''\right) \\ \end{Bmatrix}. \qquad (26)$$

Функционалу (13а) поставим в соответствие функционал расщепленного полного действия

$$\Phi_2=\int_0^T\left\{\oint_V\Re_2(q',q'')dV\right\}dt, \qquad (26а)$$

По формуле Остроградского найдем вариации функционала (26а) от функций q'. Тогда имеем:

$$\frac{\partial_o\Re_2}{\partial p'}=b_{p'}, \qquad (27а)$$

$$\frac{\partial_o\Re_2}{\partial v'}=b_{v'}, \qquad (27в)$$

$$b_{p'}=-2\operatorname{div}(v''), \qquad (28а)$$

$$b_{v'}=\begin{Bmatrix} 2\rho\cdot\dfrac{dv''}{dt}-2\mu\cdot\Delta v'+2\nabla\left(p''\right) \\ +2\rho\cdot\left[G\left(v'',\dfrac{\partial v''}{\partial X}\right)+G\left(v',\dfrac{\partial v''}{\partial X}\right)\right]-\rho\cdot F \end{Bmatrix}. \qquad (28в)$$

Итак, вектор

$$b'=\left[b_{p'},b_{v'}\right] \qquad (28с)$$

является вариацией функционала (26а), а условие

$$b'=\left[b_{p'},\ b_{v'}\right]=0 \qquad (29)$$

является необходимым для существования экстремальной линии. Аналогично,

$$b''=\left[b_{p''},\ b_{v''}\right]=0 \qquad (30)$$

Уравнения (29, 30) являются необходимыми условиями для существования седловой линии. Из симметрии этих уравнений следует, что оптимальные функции q_0' и q_0'', удовлетворяющие этим уравнениям, удовлетворяют также условию

$$q_0' = q_0''. \tag{33}$$

Вычитая попарно уравнения (29, 30) с учетом (28), получаем

$$-2\operatorname{div}(v' + v'') = 0, \tag{34}$$

$$\left.\begin{cases} 2\rho \cdot \dfrac{d(v'+v'')}{dt} - 2\mu \cdot \Delta(v'+v'') + 2\nabla(p'+p'') - 2\rho \cdot F \\ + 2\rho \cdot \left[G\left(v'', \dfrac{\partial v''}{\partial X}\right) + G\left(v', \dfrac{\partial v''}{\partial X}\right) + G\left(v', \dfrac{\partial v'}{\partial X}\right) + G\left(v'', \dfrac{\partial v'}{\partial X}\right) \right] \end{cases}\right\} = 0. \tag{35}$$

При $v' = v''$ имеем:

$$\left[G(v'') + G\left(v', \frac{\partial v''}{\partial X}\right) + G(v') + G\left(v'', \frac{\partial v'}{\partial X}\right) \right] = G(v' + v'') \tag{36}$$

Учитывая (36, 16) и сокращая (34, 35) на 2, получаем уравнения (1, 2), где

$$q = q_o' + q_o'' \tag{37}$$

- см. (13, 24, 25), т.е. уравнения экстремальной линии являются уравнениями Навье-Стокса.

5.5. О достаточных условиях экстремума

Перепишем функционал (26а) в виде

$$\Phi_2 = \int_0^T \left\{ \oint_z \left\{ \oint_y \left\{ \oint_x \Re_2(q', q'') dx \right\} dy \right\} dz \right\} dt, \tag{38}$$

где векторы q', q'' определенны по (24, 25), $X = (x, y, z, t)$ – вектор независимых переменных. Далее будем варьировать только функции $q'(X) = [p'(X), v'(X)]$.

Вектор b, опрделенный по (28с), является вариацией функционала Φ_2 по функции q' и зависит от функции q', т.е. $b = b(q')$. Здесь функция q'' здесь фиксирована.

Пусть S – экстремаль и, следовательно, в ней градиент $b_S = 0$. Для выяснения характера этого экстремума исследуем знак приращения функционала

$$\delta\Phi_2 = \Phi_2(S) - \Phi_2(C), \tag{42}$$

где C – линия сравнения, в которой $b = b_C \neq 0$. Пусть значения вектора q' на линиях S и C отличаются на

$$q'_C - q'_S = q' - q'_S = \delta q' = a \cdot b, \qquad (43)$$

где b - вариация на линии C, a – известное число. Итак,

$$q' = q'_S + a \cdot b = \begin{vmatrix} p'_S \\ v'_S \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} b_p \\ b_v \end{vmatrix}. \qquad (44)$$

где b_p, b_v определяются по (27, 41) соответственно и не зависят от q'.

Если

$$\delta \Phi_2 = a \cdot A, \qquad (48)$$

где A - знакопостоянная величина в окрестности экстремали $b_s = 0$, то эта экстремаль является достаточным условием экстремума. Если, кроме того, A - знакопостоянная величина во всей области определения функции q', то эта экстремаль определяет глобальный экстремум.

Из (42) находим

$$\delta \Re_2 = \Re_2(S) - \Re_2(C) = \Re_2(q'_S) - \Re_2(q'), \qquad (50)$$

или, с учетом (26, 44),

$$\delta \Re_2 = \left\{ \begin{array}{l} -\rho \cdot \left(\left(v'_s + ab_v\right) \dfrac{dv''}{dt} - v'' \dfrac{d\left(v'_s + ab_v\right)}{dt} \right) \\ -\mu \cdot \left(\left(v'_s + ab_v\right) \Delta\left(v'_s + ab_v\right) - v'' \Delta\left(v''\right) \right) \\ +2\left(\left(v'_s + ab_v\right) \cdot \nabla\left(p''\right) - v'' \cdot \nabla\left(p'_s + ab_p\right) \right) \\ +2\rho \cdot \left(\left(v'_s + ab_v\right) G\left(v''\right) - v'' G\left(v'_s + ab_v\right) \right) \\ -\rho \cdot F\left(\left(v'_s + ab_v\right) - v'' \right) \end{array} \right\} \qquad (51)$$

Далее получаем [27]:

$$G(v'_s + ab_v) = G(v'_s) + a\left[G_1\left(v'_s, b_v\right) + G_2\left(v'_s, b_v\right)\right] + a^2 G(b_v). \qquad (51a)$$

При этом (51) преобразуется к виду

$$\delta \Re_2 = \Re_{20} + \Re_{21} a + \Re_{22} a^2, \qquad (52)$$

где $\Re_{20}$, $\Re_{21}$, $\Re_{22}$ – не зависящие от a функции вида

$$\Re_{20}=\begin{Bmatrix}-\rho\cdot\left(v'_s\dfrac{dv''}{dt}-v''\dfrac{d(v'_s)}{dt}\right)\\ -\mu\cdot\left(v'_s\Delta(v'_s)-v''\Delta(v'')\right)+2\left(v'_s\nabla(p'')-v''\cdot\nabla(p'_s)\right)\\ +2\rho\cdot\left(v'_sG(v'')-v''G(v'_s)\right)-\rho\cdot F\left(v'_s-v''\right)\\ \end{Bmatrix}, \qquad (54)$$

$$\Re_{21}=\begin{Bmatrix}-\rho\cdot\left(b_v\dfrac{dv''}{dt}-v''\dfrac{db_v}{dt}\right)-\mu\cdot\left(b_v\Delta v'_s+v'_s\Delta(b_v)\right)\\ +2\left(b_v\cdot\nabla(p'')-v''\cdot\nabla\left(b_p\right)\right)+\\ 2\rho\left(b_vG(v'')-v''\left(G_1\left(v'_s,b_v\right)+G_2\left(v'_s,b_v\right)\right)\right)-\rho\cdot F\cdot b_v\\ \end{Bmatrix}, \qquad (55)$$

$$\Re_{22}=-\mu b_v\Delta(b_v)-2\rho v''G(b_v)\,. \qquad (56)$$

Найдем теперь

$$\frac{\partial^2(\delta\Re_2)}{\partial a^2}=\Re_{22} \qquad (57)$$

Эта функция зависит от q'. Для доказательства того, что необходимое условие (29) является также и достаточным условием глобального экстремума функционала (38) по функции q', необходимо доказать, что величина интеграла

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial a^2}=\int_0^T\left\{\oint_V\partial\Re_2(q',q'')dV\right\}dt \qquad (58)$$

или, что одно и то же, интеграла

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial a^2}=\int_0^T\left\{\oint_V\Re_{22}dV\right\}dt \qquad (59)$$

знакопостоянна. Аналогично, для доказательства того, что необходимое условие (30) является также и достаточным условием глобального экстремума функционала (38) по функции q'', необходимо доказать, что величина интеграла, аналогичного (58), знакопостоянна.

5.6. Замкнутая система

В гидродинамике часто используется представление о некоторой поверхности, через которую в данный объем жидкости поступает поток с неизменной скоростью, т.е. скоростью, которая НЕ зависит от процессов, протекающих в данном объеме. Энергия, поступающая в данный объем с этим потоком, очевидно, пропорциональна квадрату модуля скорости. Будем называть такую поверхность генерирующей поверхностью. (Заметим, что это к какой-то мере аналогично источнику стабилизированного постоянного тока, величина которого не зависит от сопротивления электрической цепи.)

Рассмотрим замкнутую систему, где объем жидкости ограничен стенками и свободными поверхностями. Если стенки являются абсолютно твердыми, то удар жидкости о них не изменяет энергию жидкости. Форма свободных поверхностей жидкости может изменятся, но объем несжимаемой жидкости не изменяется. Таким образом, жидкость в замкнутой системе не обменивается энергией с другими объемами жидкости.. Следовательно, энергия, зависящая от скорости движения жидкости в соседних объемах, должна быть исключена из потока энергии, поступающей в данный замкнутый объем. Остается, однако, работа давления на поверхности замкнутого объема. Другими словами, поток энергии через замкнутую систему определяется только внешним давлением. Это может быть давление атмосферы на свободную поверхность или давление на подвижную стенку (поршень) и т.п.

$$\iiint\limits_V P_7 dV = \iint\limits_{S_f} p \cdot v_{nf} \cdot dS + \iint\limits_{S_g} W^2 \cdot v_{ng} \cdot dS, \qquad (59.1)$$

где

S_f, S_g - свободная и генерирующая поверхности соответственно,

v_{nf}, v_{ng} - нормальные составляющие скорости потока, входящего в свободную и генерирующую поверхности соответственно; при этом скорости v_{ng} фиксированы.

Таким образом, поток энергии через замкнутую систему равен энергии генерирующих поверхностей и работе давления на повижных границах и свободных поверхностях. В этом случае уравнения (1, 2) принимают вид

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}-\mu\Delta v-\rho F=0 \qquad (59.2)$$

внутри замкнутой области и

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}-\mu\Delta v-\rho F-p/d-\rho\cdot W^2/d=0 \qquad (59.2a)$$

на границах. При этом слагаемое p/d в этом уравнении учитывается только на границах с известными давлениями. Коэффициент d согласует размерность давления (н/м^2=кГ/(м*с^2)) с размерностью других членов (кГ/м^2*с^2). Он имеет размерность (м) и смысл толщины слоя жидкости, в котором действует давление. Слагаемое $\rho\cdot W^2/d$, величина которого неизменна, учитывается только на генераторных поверхностях. И здесь коэффициент d имеет тот же смысл и размерность.

В этом случае энержиан (26) распадается на два слагаемых вида

$$\Re_2^{(V)}(q',q'')=\left\{\begin{matrix}-\rho\cdot\left(v'\frac{dv''}{dt}-v''\frac{dv'}{dt}\right)-\mu\cdot\left(v'\Delta v'-v''\Delta v''\right)\\ -\rho\cdot F\left(v'-v''\right)\end{matrix}\right\}. \qquad (59.3)$$

$$\Re_2^S(q',q'')=\left\{p\cdot\left(v_n'-v_n''\right)\right\}. \qquad (59.4)$$

Функционал (26a) принимает вид

$$\Phi_2=\int_0^T\left\{\oint_V\Re_2^{(V)}(q',q'')dV+\oint_S\Re_2^{(S)}(q',q'')dS\right\}dt, \qquad (59.5)$$

Квазиэкстремаль этого функционала по функции $q'=v'$ принимает вид (ср. с (28))

$$2\rho\cdot\frac{dv''}{dt}-2\mu\cdot\Delta v'-\rho\cdot F-p/d-\rho\cdot W^2/d=0. \qquad (59.6)$$

а по функции $q''=v''$ - вид

$$2\rho\cdot\frac{dv'}{dt}-2\mu\cdot\Delta v''-\rho\cdot F-p/d-\rho\cdot W^2/d=0. \qquad (59.7)$$

Отсюда, как показано в общем случае, следует, что необходимыми условиями для существования седловой линии функционала (59.5) является уравнение

$$\frac{dv}{dt} - \mu \cdot \Delta v - \rho \cdot F - p/d - \rho \cdot W^2/d = 0. \qquad (60)$$

Решение уравнения (60) позволяет найти скорости. Вычисление давлений **внутри** замкнутой области при известных скоростях выполняется по уравнению

$$\nabla p + \rho(v \cdot \nabla)v = 0. \qquad (61)$$

Далее мы рассмотрим только решение уравнения (60) (не рассматривая уравнение непрерывности), как задачу безусловной оптимизации. Для этого воспользуемся изложенным выше методом. Тогда получим, что необходимое условие оптимума соответствующего функционала является достаточным, если знакопостоянным является интеграл (59), где для замкнутой системы

$$\Re_{22} = -\mu b_v \Delta(b_v). \qquad (63)$$

При этом оптимальная седловая линия является глобальной.

Итак, для доказательства существования глобальной седловой линии или, что одно и то же, для доказательства того, что решение уравнений (1, 2) в замкнутой системе существует и является единственным, необходимо доказать знакопостоянство интеграла (59, 63).

Интеграл

$$J = \mu \int_0^T \left\{ \oint_V v \cdot \Delta(v) dV \right\} dt \qquad (64)$$

выражает тепловую энергию, выделяемую жидкостью в результате внутреннего трения. Эта энергия положительна вне зависимости от того, какова функция вектора скорости от координат. Более строгое доказательство здесь не приводится. Итак, интеграл (59, 63) имеет отрицательное значение на любой итерации, что и требовалось показать.

Возможен случай, когда система физически не ограничена стенками и свободными поверхностями, но является замкнутой в указанном выше смысле (отсутствует обмен энергией с другими системами). Примером такой системы является двумерное течение, где на жидкость воздействуют только плоские массовые силы.

5.7. Выводы

1. Среди расчитываемых объемов потока жидкости можно выделить <u>замкнутые</u> объемы потока жидкости, которые <u>не обмениваются</u> потоком с соседними объемами – т.н. замкнутые системы.

2. Замкнутые системы ограниченны
   - непроницаемыми стенками,
   - свободными поверхностями, находящимися под известным давлением,
   - подвижными стенками, находящимися под известным давлением,
   - т.н. генерирующими поверхностями, через которые поток проходит с известной скоростью.

3. Можно утверждать, что системы, описываемые уравнениями Навье-Стокса и имеющие определенные граничные условия (давления или скорости) на всех границах, являются замкнутыми.

4. Для замкнутых систем уравнения (1, 2) принимают вид уравнений, (59.2а) и (61), причем краевые условия включены в уравнение (59.2а) потому, что в нем два последних члена относятся только к точкам на границах области.

5. Уравнения (59.2а) и (61) могут решаться последовательно: решение уравнения (59.2а) позволяет найти скорости, а вычисление давлений внутри замкнутой области при известных скоростях выполняется по уравнению (61).

6. Решение уравнения (59.2а) эквивалентно поиску глобального экстремума функционала (59.5).

7. Этот экстремум существует для любой замкнутой системы.

Литература

1. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, четвертая редакция. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875. Россия-Израиль, 2012, ISBN 978-0-557-4837-3, http://technic.itizdat.ru/docs/Solik/FIL13608602270N782003001/
2. Khmelnik S.I. Variational Principle of Extremum in electromechanical and electrodynamic Systems, second edition. Published by “MiC” - Mathematics in Computer Comp., printed in USA, printed in USA, Lulu Inc. ID 1142842. Israel-Russia, 2010, ISBN 978-0-557-08231-5, http://technic.itizdat.ru/docs/Solik/FIL13623140720N093141001/
3. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. Изд. «Лань», 2003, 400 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Эдиториал УРСС, Москва, 2000.
5. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Радио и связь, 2000. -559 с.

6. Хмельник С.И. Принцип экстремума для электрических цепей переменного тока. М.: ВНИИ Электроэнергетики, депонировано в Информэнерго, № 2960-ЭИ-88, 1988, 26 с.
7. Хмельник С.И. Вариационные принципы в электрических моделях сплошных сред. Задачи технической гидродинамики. Сборник статей. М.: Наука, 1991, 148-158 с.
8. Хмельник С. Комплекс программ расчета электромеханических систем. IV Международная конференция «Творческие поиски ученых Израиля сегодня», Израиль, Ашкелон, 1999, 148-155 с.
9. Хмельник С.И. Электрические цепи постоянного тока для моделирования и управления. Алгоритмы и аппаратура. Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp., printed in USA, Lulu Inc., ID 113048. Израиль-Россия, 2004, 174 с., http://technic.itizdat.ru/docs/Solik/FIL13570394240N964698001/
10. Хмельник С.И. Принцип экстремума в электрических цепях. Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. Вып. 6. М.: Энергоатомиздат, 2003, сс. 325-333. ISBN 5-283-02595-0.
11. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума для электрических линий и плоскостей. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», printed in USA, Lulu Inc., ID 124173. Россия-Израиль, 2005, вып. 1, http://technic.itizdat.ru/docs/DNA/FIL13560871960N528143001/
12. Хмельник С.И. Уравнение Пуассона и квадратичное программирование. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», printed in USA, Lulu Inc., ID 172756. Россия-Израиль, 2005, вып. 2, ISBN 978-1-4116-5956-8, http://technic.itizdat.ru/docs/DNA/FIL13560873900N816336001/
13. Хмельник С.И. Уравнения Максвелла как следствие вариационного принципа. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», printed in USA, Lulu Inc., ID 237433. Россия-Израиль, 2006, вып. 3, ISBN 978-1-4116-5085-5, http://technic.itizdat.ru/docs/DNA/FIL13560875910N582981001/
14. Khmelnik S.I. Variational Principle of Extremum in electromechanical Systems, second edition. Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp., printed in USA, printed in USA, Lulu Inc. ID 125002. Israel-Russia, 2007, ISBN 978-1-411-633445.
15. Хмельник С.И. О вариационном принципе экстремума в электромеханических системах. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», printed in USA, Lulu Inc. ID 124173. Россия-Израиль, 2005, вып. 1, ISBN 1-4116-3209-5, http://technic.itizdat.ru/docs/DNA/FIL13560871960N528143001/

16. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических системах и его применение, http://www.sciteclibrary.ru/ris-stat/st1837.pdf
17. Хмельник С.И. Принцип максимума и вариационный принцип для электромеханических систем. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», printed in USA, Lulu Inc. 237433. Россия-Израиль, 2006, вып. 3, ISBN 1-4116-5085-5, http://technic.itizdat.ru/docs/DNA/FIL13560875910N582981001/
18. Хмельник С.И. Уравнения Максвелла как следствие вариационного принципа. Вычислительный аспект. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», printed in USA, Lulu Inc. 322884, Россия-Израиль, 2006, вып. 4, ISBN 978-1-4303-0460-9, http://technic.itizdat.ru/docs/DNA/FIL13560878410N907182001/
19. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических системах, четвертая редакция. Publisher by "MiC", printed in USA, Lulu Inc., ID 172054. Россия-Израиль, 2007, ISBN 978-1-4303-2389-1.
20. Khmelnik S.I. Functional for Power System. Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp., printed in USA, printed in USA, Lulu Inc. ID 133952. Israel-Russia, 2005, http://technic.itizdat.ru/docs/Solik/FIL13623154710N686578001/
21. Хмельник С.И. Функционал для энергосистем. Publisher by "MiC", printed in USA, Lulu Inc., ID 135568. Россия-Израиль, 2005, http://technic.itizdat.ru/docs/Solik/FIL13611979760N655682001/
22. Khmelnik S.I. Prinziple Extremum of full Action. European research. 2011. № 10(13).
23. Хмельник С.И. Принцип экстремума полного действия. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», printed in USA, Lulu Inc. 8976094. Россия-Израиль, 2010, вып. 15, ISBN 978-0-557-52134-0, http://technic.itizdat.ru/docs/DNA/FIL13560311600N138182001/
24. Khmelnik S.I. Principle extremum of full action, "The Papers of Independent Authors", publ. «DNA», Russia-Israel, 2010, issue 17, printed in USA, Lulu Inc., ID 9748173, ISBN 978-0-557-88376-9, http://technic.itizdat.ru/docs/DNA/FIL13565170640N852270001/
25. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика, часть 2. Гос. изд. "Физматлит", Москва, 1963, 727 с.
26. Н.А. Умов. Уравнения движения энергии в телах. - Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874. - 56 с.

27. С.И. Хмельник. Уравнения Навье-Стокса. Существование и метод поиска глобального решения. Вторая редакция. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 9971440, Израиль, 2010, ISBN 978-1-4583-1953-1, http://technic.itizdat.ru/docs/Solik/FIL13566098840N711272001/